514(076)
Р-936

Р-93

Н. РЫБКИН

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ПЕРЕРАБОТАНО
В. А. ЕФРЕМОВЫМ

Цена 80 к., переплет 10 к.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА — 1933

ПРОВЕРЕНО
1954 г.

Н. РЫБКИН

574(076)ем
Р-936

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

С ПРИЛОЖЕНИЕМ ЗАДАЧ
ПО СТЕРЕОМЕТРИИ,
ТРЕБУЮЩИХ ПРИМЕНЕНИЯ
ТРИГОНОМЕТРИИ

ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

8—9 ГОДЫ ОБУЧЕНИЯ

ПЕРЕРАБОТАНО
В. А. ЕФРЕМОВЫМ

Утверждено Коллегией Наркомпроса РСФСР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА — 1933

№ 221565

РСФСР
БИБЛИОТЕКА

ТРИГОНОМЕТРИЯ.

§ 1. Измерение дуг и углов.

Обобщение понятий угла и дуги.

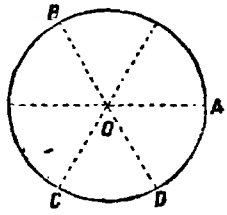
1. Какой угол описывает в течение 4 часов часовая стрелка часов? минутная стрелка?

2. Колесо машины в 2 секунды делает 6 оборотов. На сколько градусов повернется колесо за 1 секунду? за 10 секунд?

3. Зубчатое колесо имеет 72 зубца. На сколько градусов колесо повернется при обороте на 1; 30; 144; 300 зубцов?

4. Начертить положение подвижного радиуса для угла, равного: $+45°$; $-30°$; $+225°$; $-135°$; $-90°$; $+450°$; $-810°$; $+2070°$. Для каких углов подвижные радиусы совпадают?

5. Выразить в градусах сумму дуг: $\smile ABCAB + \smile BAC + \smile CDA$ (черт. 1).



Черт. 1.

6. Написать общий вид углов для случаев, когда подвижной радиус занимает положение: 1) OB; 2) OD (черт. 1) и найти несколько частных значений этих углов.

Радианное измерение.

7. 1) Радиус круга равен 5 *см*. Вычислить длину дуги, содержащей $18°$.

2) В круге радиуса R определить длину дуги, содержащей $\alpha°$.

8. 1) С помощью числа π составить отвлеченные выражения следующих дуг: a) $30°$; b) $45°$; c) $60°$; d) $135°$; e) $15°$; f) $22°30'$; g) $36°$; h) $75°$; i) $108°$; k) $150°$; l) $157°30'$; m) $162°$.

2) Выразить в радианах: a) $51°$; b) $27°$; c) $76°30'$; d) $12°30'$; e) $28°42'$; f) $73°21'$; g) $117°$; h) $216°13'$.

3) Выразить в радианах внутренний угол правильного 3-угольника, 4-угольника, 5-угольника, 6-угольника и n-угольника.

9. 1) Выразить в градусах и минутах углы, равные 1,5; 2; 0,75 радиана; а также $\frac{\pi}{6}$; $\frac{2}{3}\pi$; $1\frac{1}{2}\pi$; $\frac{\pi}{8}$; $\frac{3}{4}\pi$; $1\frac{1}{5}\pi$ радианов.

2) Выразить (с помощью таблиц) в градусной мере: 0,6981; 1,3090; 0,2356; 1,0071; 3,8048; 0,48; 1,3; 0,8.

Угловая скорость.

10. Колесо, радиус которого равен 1,2 *м*, делает в 1 минуту 300 оборотов.

1) Найти его угловую скорость ω в 1 секунду (угловая скорость выражается в радианах).

2) Найти окружную скорость той точки колеса, которая отстоит от центра на 20 *см*.

3) Найти окружную скорость точки, находящейся на окружности колеса.

4) Доказать, что окружная скорость вращения точки, отстоящей от центра на расстоянии r, равна $r\omega$.

11. Угловая скорость вала равна 21 (в 1 секунду). Определить число его оборотов в 1 минуту.

§ 2. Изменение тригонометрических функций с изменением угла.

1. В какой четверти все функции положительны? Существует ли четверть, в которой все функции отрицательны?

2. Если угол принадлежит *треугольнику*, то какие из его тригонометрических функций могут быть отрицательны и когда именно?

3. Какие знаки имеют тригонометрические функции половины угла в *треугольнике*?

4. В каких пределах может изменяться сумма $1+\sin x$?

5. Какие из следующих равенств являются справедливыми:

1) $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{ab}}{\frac{1}{2}(a+b)}$; 2) $\cos\beta=a+\dfrac{1}{a}$; 3) $\sec\alpha=\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$?

6. Может ли быть отрицательной дробь $\dfrac{\cos x}{\sec x}$?

Упростить выражения в задачах 7—13:

7. $a\cdot\sin 0+b\cdot\cos 90^\circ+c\cdot\operatorname{tg}180^\circ$.

8. $a\cdot\operatorname{tg}0+b\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2}+c\cdot\sec 0$.

9. $a\cdot\cos 0+b\cdot\cos 180^\circ+c\cdot\cos 360^\circ$.

10. $a^2\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}+2ab\cdot\sec\pi-b^2\cdot\sin\dfrac{3}{2}\pi$.

11. $a^2\cdot\operatorname{cosec}90^\circ-2ab\cdot\sin 180^\circ+b^2\cdot\operatorname{cosec}270^\circ$.

12. $a^2\cdot\sin 2\pi+2ab\cdot\cos\dfrac{3}{2}\pi+b^2\cdot\operatorname{tg}2\pi$.

13. $a^3\cdot\operatorname{ctg}270^\circ+b^3\cdot\operatorname{tg}90^\circ$.

14. В круге радиуса 5 *см* построить углы в 30°; 120°; 225°; —30°; —120°; —560° и четыре тригонометрические линии этих

углов. Измерив с точностью до 1 *мм* тригонометрические линии, найти (с точностью до 0,1) значения следующих функций: 1) $\operatorname{tg} 30°$; 2) $\cos 120°$; 3) $\sin 225°$; 4) $\cos(-30°)$; 5) $\operatorname{tg}(-120°)$; 6) $\operatorname{ctg}(-560°)$.

15. Определить знак каждой из следующих разностей: 1) $\sin 20° - \sin 21°$; 2) $\cos 20° - \cos 21°$; 3) $\operatorname{tg} 20° - \operatorname{tg} 21°$; 4) $\operatorname{ctg} 20° - \operatorname{ctg} 21°$; 5) $\cos 20° - \cos 120°$; 6) $\sin 120° - \sin 240°$; 7) $\operatorname{tg} 120° - \operatorname{tg} 40°$; 8) $\operatorname{ctg} 30° - \operatorname{ctg} 130°$.

16. Какая функция в каждой из следующих пар больше: 1) $\sin 20°$ или $\cos 20°$? 2) $\sin 50°$ или $\cos 50°$? 3) $\operatorname{tg} 40°$ или $\operatorname{ctg} 40°$? 4) $\operatorname{tg} 50°$ или $\operatorname{ctg} 50°$?

Построение и нахождение угла.

17. Построить углы, синусы которых равны: 1) 0,6; 2) $-\frac{1}{2}$. Найти их величину с точностью до 1°.

18. Построить углы, косинусы которых равны: 1) $\frac{2}{3}$; 2) $-0{,}4$.

19. Построить углы, тангенсы которых равны: 1) $+1{,}5$; 2) -1

20. Построить углы, котангенсы которых равны: 1) -2; 2) $+1$

21. По данному общему виду угла x написать его частные положительные значения, меньшие $360°$ (2π):

1) $x = 15° + 120° \cdot n$;
2) $x = -60° + 360° \cdot n$;
3) $x = -10° + 60° \cdot n$;
4) $x = \pm 120° + 720° \cdot n$;
5) $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi \cdot n$;
6) $x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n$;
7) $x = (-1)^n \cdot 45° + 180° \cdot n$;
8) $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi \cdot n$.

22. Написать общие решения уравнений, найдя углы (с точностью до 1°) построением и измерением.

1) $\operatorname{tg} x = 2{,}6$;
2) $\operatorname{tg} x = -0{,}8$;
3) $\cos x = 0{,}9$;
4) $\cos x = -\frac{2}{3}$;
5 $\sin x = 0{,}25$;
6) $\sin x = -\frac{5}{7}$.

В задачах 23—31 требуется найти значение той тригонометрической функции, которая содержится в уравнении, и построить углы.

23. $\sin^2 x - 3 = 2 \sin x$.
24. $\cos^2 x + \cos x = 1$.
25. $6 \sin^4 x = 1 - \sin^2 x$.
26. $\sin^2 x = 2 \sin x$.
27. $\operatorname{tg}^3 x = 2 \operatorname{tg} x$.
28. $\sec^2 x = 2 \sec x$.
29. $\operatorname{ctg}^3 x + 4 \operatorname{ctg} x = 0$.
30. $\frac{2}{1 + \operatorname{tg} x} = 0$.
31. $(\cos x - 2)(2 \operatorname{cosec} x + 1) = 0$.

Обратные круговые функции.

32. Решить уравнения:
1) $\operatorname{tg} x = m$; 2) $\cos x = m$; 3) $\sin x = m$.
Какие значения можно подразумевать под m в каждом из этих уравнений?

33. Записать с помощью обратных круговых функций равенства:

1) $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; 2) $\sin(-45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\cos 90° = 0$; 5) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$; 6) $\operatorname{tg} 0 = 0$;

7) $\operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}$; 8) $\operatorname{ctg} 0 = \infty$.

34. Выразить с помощью таблиц в градусах и радианах:

1) $\operatorname{arc\,sin} 0{,}7314$; 2) $\operatorname{arc\,cos} 0{,}3987$;
3) $\operatorname{arc\,tg}\ 3{,}677$; 4) $\operatorname{arc\,ctg} 0{,}5117$.

35. Найти x из уравнений:

1) $\operatorname{arc\,sin} x = \frac{\pi}{4}$; 2) $\operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{6}$; 3) $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{3}$;

4) $\operatorname{arc\,sin} \frac{x}{3} = a$; 5) $\operatorname{arc\,cos} \frac{x}{a} = \frac{b}{c}$; 6) $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = a$.

36. Построить:

1) $\operatorname{arc\,sin} 0{,}8$; 2) $\operatorname{arc\,sin}\left(-\frac{1}{3}\right)$; 3) $\operatorname{arc\,cos} \frac{2}{3}$;

4) $\operatorname{arc\,cos}(-0{,}75)$; 5) $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2}$; 6) $\operatorname{arc\,tg}(-1{,}5)$;

7) $\operatorname{arc\,tg} 1{,}2$; 8) $\operatorname{arc\,ctg}(-0{,}6)$; 9) $\operatorname{arc\,sec} 1\frac{1}{2}$;

10) $\operatorname{arc\,cosec}(-2)$.

§ 3. Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же угла.

Выразить тригонометрические функции угла α:

1. Через $\sin\alpha$. **2.** Через $\cos\alpha$.
3. Через $\operatorname{tg}\alpha$. **4.** Через $\operatorname{ctg}\alpha$.

Найти тригонометрические функции угла α, если дано:

5. $\sin\alpha = 0{,}8$. **6.** $\sin\alpha = -0{,}3$.

7. $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. **8.** $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$. **9.** $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}$.

10. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{9}{40}$. **11.** $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{8}{15}$. **12.** $\operatorname{ctg}\alpha = -3$.

13. $\sec\alpha = 3$. **14.** $\sec\alpha = -1\frac{9}{20}$. **15.** $\operatorname{cosec}\alpha = 2{,}6$.

16. $\operatorname{cosec}\alpha = -\sqrt{3}$.

Предполагая: $0 < b < a$, найти тригонометрические функции угла α по данным задач 17—19:

17. $\sin\alpha = \frac{a-b}{a+b}$. **18.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. **19.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$.

Найти тригонометрические функции угла α, если:

20. α — угол положительный острый и $\operatorname{tg}\alpha = 4\frac{19}{20}$.

21. α — угол треугольника и $\cos\alpha = -0{,}28$.

22. α оканчивается в III четверти и $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$.

23. α оканчивается в IV четверти и $\operatorname{ctg}\alpha = -1{,}05$.

Упростить выражения в задачах 24—62:

24. $1 - \sin^2\alpha$.

25. $1 - \cos^2\alpha$.

26. $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$.

27. $\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha - 1}$.

28. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha$.

29. $\sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha$.

30. a) $\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$; b) $\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$.

31. a) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; b) $\frac{\cos^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha - 1}$.

32. $\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

33. $\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

34. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$.

35. $\sin\alpha\cdot\sec\alpha$.

36. $\cos\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$.

37. $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sec\alpha$.

38. $\sin\alpha : \operatorname{tg}\alpha$.

39. $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{ctg}\alpha$.

40. $1 - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$.

41. $1 - \sin^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$.

42. $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\cdot\cos^2\alpha$.

43. $(\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha)^2 + (\operatorname{ctg}\alpha\cdot\sin\alpha)^2$.

44. $(\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha)^2 - 1$.

45. $\sin^2\alpha\cdot\sec^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

46. $\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta + 1$.

47. $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}\cdot\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta + 1$.

48. $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

49. $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha}$.

50. $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$.

51. $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2$.

52. $\frac{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}$.

53. $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$ выразить: a) через $\sin\alpha$ и b) через $\cos\alpha$.

54. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$ выразить через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

55. $\frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$ выразить через $\operatorname{tg}\alpha$.

56. $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$ выразить через $\operatorname{ctg}\alpha$.

57. $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ выразить: a) через $\operatorname{tg}\alpha$ и b) через $\operatorname{ctg}\alpha$.

58. $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$ выразить: a) через $\operatorname{tg}\alpha$ и b) через $\operatorname{ctg}\alpha$.

59. Выразить $\sec\alpha$ через $\operatorname{ctg}\alpha$, если α оканчивается в IV четверти.

60. Вычислить $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{4}$.

61. Определить $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=m$.

62. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=m$; определить:

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha \text{ и } \operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha.$$

Доказать тождества в задачах 63—92:

63. $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$.

64. $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

65. $\frac{\sec\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha+1}$.

66. $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$.

67. $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=\sec^2\alpha-\operatorname{cosec}^2\alpha$.

68. $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha$.

69. $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$.

70. $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}=\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

71. $\frac{\sin\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}=\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

72. $\frac{\sec\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{cosec}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$.

73. $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}{\sec\alpha-\operatorname{cosec}\alpha}$.

74. $\frac{1+\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{1+\sec\alpha}{1+\operatorname{cosec}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

75. $\frac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}:\frac{1+\sec\alpha}{1+\operatorname{cosec}\alpha}=\operatorname{ctg}^3\alpha$.

76. $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}=1$.

77. $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=1$.

78. $\frac{\sin^2\alpha}{\sec^2\alpha-1}+\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}=1$.

79. $\operatorname{cosec}\alpha-\sin\alpha=\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

80. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$.

81. $\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha=\sec^2\alpha\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha$.

82. $\sec^2\alpha(\operatorname{cosec}^2\alpha-1)=\operatorname{cosec}^2\alpha$.

83. $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha=(1+\cos\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)$.

84. $(\sin\alpha-\operatorname{cosec}\alpha)(\cos\alpha-\sec\alpha)=\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

85. $(\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha)(\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)=(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)$.

86. $\sin\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)+\cos\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)=\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha$.

87. $\sin^3\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha$.

88. $\operatorname{tg}^3\alpha\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha-\operatorname{cosec}\alpha\cdot\sec\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha\cdot\sec^2\alpha=\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$.

89. $\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha=(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2$.

90. $\left(\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}\right)^2=\frac{\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

91. $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$.

92. $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=2\operatorname{tg}\alpha.$

Решить уравнения 93 — 113. Построив по найденной из уравнения функции угол и измерив его (с точностью до 1°) транспортиром, ответ написать в общем виде.

93. $\sin^2 x=1+\cos^2 x.$ **94.** $\sin x\cdot\operatorname{tg} x=\frac{3}{2}.$

95. $\sin x=\operatorname{ctg} x.$ **96.** $\cos x-1+2\sin x\cdot\operatorname{tg} x=0.$

97. $\sin^2 x+\cos x=0.$ **98.** $\sec x=\operatorname{tg}^2 x.$

99. $2\cos^2 x=3\sin x+2.$ **100.** $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x=\frac{3}{2}.$

101. $\cos x=2\operatorname{tg} x.$ **102.** $\operatorname{cosec} x-\sin x=\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x.$

103. $2\operatorname{tg} x=-3\operatorname{cosec} x.$ **104.** $2\sec x=\operatorname{cosec} x.$

105. $2\cos^2 x+4\sin^2 x=3.$ **106.** $2(\cos^2 x-\sin^2 x)=1.$

107. $\sin^4 x-\cos^4 x=0{,}5.$

108. $1+\sin x\cos x-\sin x-\cos x=0.$

Решить однородные уравнения:

109. $\sin x=\cos x.$ **110.** $\sin x-\sqrt{3}\cos x.$

111. $3\sin^2 x=\cos^2 x.$ **112.** $\sin^2 x+2\sin x\cos x=3\cos^2 x.$

113. $1-3\cos^2 x=2\sin x\cos x.$

§ 4. Функции дополнительных и пополнительных углов.

1. Привести к углу, меньшему 45°: 1) $\sin 73°$; 2) $\cos 80°40'$; 3) $\operatorname{tg} 69°25'40''$; 4) $\operatorname{ctg} 59°59'$.

2. Привести к тем же функциям острого угла: 1) $\sin 112°20'$; 2) $\cos 99°25'35''$; 3) $\operatorname{tg} 108°48'36''$; 4) $\operatorname{ctg} 140°40'$.

3. Привести к углу, меньшему 45°: 1) $\sin 121°40'$; 2) $\sin 163°35'$; 3) $\cos 158°17'$; 4) $\cos 98°21'$; 5) $\operatorname{tg} 160°27'32''$; 6) $\operatorname{tg} 106°32'$; 7) $\operatorname{ctg} 120°28'40''$; 8) $\operatorname{ctg} 140°42'$.

Упростить выражения:

4. $\frac{\operatorname{tg}(180°-\alpha)}{\operatorname{ctg}(90°-\alpha)}.$ **5.** $\frac{\cos^2(90°-\alpha)-1}{\cos(180°-\alpha)}.$

6. $\sin(\pi-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(\pi-\alpha).$ **7.** $\frac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}.$

8. $\sin(90°-\alpha)+\sin(90°+\alpha)+2\cos(180°-\alpha).$

9. $\cos(90°-\alpha)+\cos(90°+\alpha).$

10. $\operatorname{tg} 43°\cdot\operatorname{tg} 45°\cdot\operatorname{tg} 47°.$

11. $\cos(180°-\alpha)\cdot\sin(90°+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(180°-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(90°+\alpha).$

12. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)+\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$

13. $\dfrac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi-\alpha)}$.

14. $\dfrac{\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)\cos(180^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ+\alpha)\operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)}$.

15. Показать, что:

$\sin(45^\circ+\alpha)=\cos(45^\circ-\alpha)$; $\cos(45^\circ+\alpha)=\sin(45^\circ-\alpha)$ и т. д.

§ 5. Таблицы натуральных величин тригонометрических функций.

По таблицам натуральных тригонометрических величин найти числовые значения следующих функций:

1. 1) $\sin 15^\circ$; 2) $\sin 45^\circ$; 3) $\sin 60^\circ$; 4) $\sin 73^\circ$;
5) $\sin 38^\circ30'$; 6) $\sin 69^\circ24'$; 7) $\sin 11^\circ50'$; 8) $\sin 87^\circ10'$;

2. 1) $\operatorname{tg} 20^\circ$; 2) $\operatorname{tg} 45^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 85^\circ$; 4) $\operatorname{tg} 72^\circ30'$;
5) $\operatorname{tg} 17^\circ42'$; 6) $\operatorname{tg} 53^\circ13'$; 7) $\operatorname{tg} 20^\circ47'$; 8) $\operatorname{tg} 83^\circ7'$;
9) $\operatorname{tg} 85^\circ28'$; 10) $\operatorname{tg} 88^\circ30'$; 11) $\operatorname{tg} 89^\circ48'$; 12) $\operatorname{tg} 89^\circ59'$.

3. 1) $\cos 65^\circ$; 2) $\cos 45^\circ$; 3) $\cos 30^\circ$; 4) $\cos 73^\circ$; 5) $\cos 38^\circ30'$; 6) $\cos 20^\circ24'$; 7) $\cos 61^\circ10'$; 8) $\cos 78^\circ46'$; 9) $\cos 2^\circ52'$; 10) $\cos 1^\circ20'$.

4. 1) $\operatorname{ctg} 20^\circ$; 2) $\operatorname{ctg} 45^\circ$; 3) $\operatorname{ctg} 37^\circ30'$; 4) $\operatorname{ctg} 71^\circ24'$;
5) $\operatorname{ctg} 69^\circ13'$; 6) $\operatorname{ctg} 19^\circ37'$; 7) $\operatorname{ctg} 88^\circ15'$; 8) $\operatorname{ctg} 5^\circ$;
9) $\operatorname{ctg} 2^\circ27'$; 10) $\operatorname{ctg} 90^\circ$; 11) $\operatorname{ctg} 1^\circ53'$.

Найти величину острых углов по данным значениям их функций:

5. 1) $\sin\alpha=0{,}3420$; 2) $\sin\beta=0{,}5948$; 3) $\sin\gamma=0{,}842$;
4) $\sin x=0{,}9293$; 5) $\sin y=1{,}0024$; 6) $\sin z=0{,}3932$.

6. 1) $\operatorname{tg}\alpha=0{,}4452$; 2) $\operatorname{tg}\beta=11{,}43$; 3) $\operatorname{tg}\gamma=2{,}675$;
4) $\operatorname{tg} x=0{,}5452$; 5) $\operatorname{tg} y=5{,}558$; 6) $\operatorname{tg} z=0{,}5$;
7) $\operatorname{tg} u=0{,}42$; 8) $\operatorname{tg} v=12{,}9$; 9) $\operatorname{tg} w=6{,}63$.

7. 1) $\cos\alpha=0{,}891$; 2) $\cos\beta=0{,}910$; 3) $\cos\gamma=0{,}6361$;
4) $\cos x=1{,}0008$; 5) $\cos y=0{,}8189$; 6) $\cos z=0{,}4485$.

8. 1) $\operatorname{ctg}\alpha=2{,}747$; 2) $\operatorname{ctg}\beta=0{,}4142$; 3) $\operatorname{ctg}\gamma=1{,}768$;
4) $\operatorname{ctg} x=1{,}4948$; 5) $\operatorname{ctg} y=0{,}6946$; 6) $\operatorname{ctg} z=1{,}6946$;
7) $\operatorname{ctg} u=7{,}115$; 8) $\operatorname{ctg} v=10{,}23$; 9) $\operatorname{ctg} w=20$.

Найти по таблицам значения следующих функций тупых углов:

9. $\sin 105^\circ$; $\sin 172^\circ8'$; $\sin 140^\circ15'$; $\sin 115^\circ22'$.

10. $\cos 118^\circ$; $\cos 156^\circ30'$; $\cos 98^\circ42'$; $\cos 169^\circ17'$

11. $\operatorname{tg} 121^\circ$; $\operatorname{tg} 160^\circ24'$; $\operatorname{tg} 101^\circ41'$; $\operatorname{tg} 147^\circ39'$.

12. $\operatorname{ctg} 175^\circ$; $\operatorname{ctg} 124^\circ30'$; $\operatorname{ctg} 171^\circ13'$; $\operatorname{ctg} 111^\circ11'$.

§ 6. Решение прямоугольных треугольников.

Обозначения. В прямоугольном треугольнике ABC угол $A=\alpha$, угол $B=\beta$, угол $C=90°$, катет $BC=a$, катет $AC=b$ и гипотенуза $AB=c$.

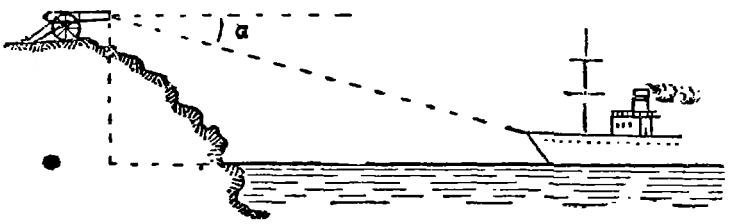
1. Дан прямоугольный треугольник ABC. Определить: 1) $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $a=48$ *см* и $c=50$ *см*; 2) $\operatorname{tg}\alpha$ и $\cos\alpha$, если $a=15$ *м* и $b=20$ *м*; 3) $\operatorname{tg}\beta$ и $\cos\beta$, если $b=8{,}4$ *см* и $c=8{,}5$ *см*.

2. Длины сторон прямоугольного треугольника ABC в сантиметрах выражаются числами $a=7\frac{1}{5}$ и $c=17$. Определить все функции угла β.

3. В прямоугольном треугольнике ABC вычислить: 1) катет a по гипотенузе $c=30{,}6$ *см* и $\sin\alpha=\frac{2}{3}$; 2) c по $a=51$ *см* и $\sin\alpha=0{,}75$.

4. В прямоугольном треугольнике ABC вычислить катет a, если: 1) $b=14$ *м* и $\operatorname{tg}\alpha=0{,}72$; 2) $b=20{,}4$ *дм* и $\operatorname{tg}\alpha=1{,}5$.

5. Дирижабль попал в полосу света прожектора, когда ось прожектора составляла с горизонтом угол в 47°. В то же время расстояние по прямой от прожектора до дирижабля было равно 3,5 *км*. Вычислить: 1) высоту подъема дирижабля, 2) горизонтальное расстояние дирижабля от прожектора.



Черт. 2.

6. Батарея помещена на утесе высотой в 150 *м*. Угол понижения мишени (черт. 2), плавающей в море, определен с батареи в 9°. Чему равно расстояние (по горизонтальному направлению) от мишени до батареи?

7. Перископ подводной лодки виден на расстоянии 1500 *м* от форта, орудия которого помещены на высоте 330 *м* от поверхности воды. Определить угол, на который нужно опустить орудия, чтобы они были направлены на лодку.

8. Аэроплан сигнализирует на батарею, что он находится как раз над мишенью на высоте 1700 *м* (черт. 3); в тот же момент

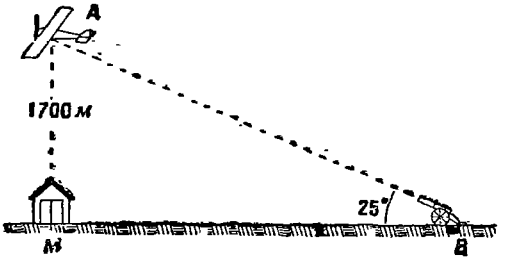
наблюдатель на батарее находит, что угол высоты самолета равен 25°. Вычислить расстояние (по горизонтали) батареи от мишени.

9. Чтобы определить ширину реки, проводят на одном берегу ее, непосредственно у воды, базис AB, равный a метрам; из конца A базиса, по перпендикулярному к нему направлению, на противоположном берегу у самой воды видно дерево C; из другого же конца B базиса это дерево видно под углом β к нему. Вычислить ширину реки, если $a=42\,м$ и $\beta=25°28'$.

10. Из точки, отстоящей на расстоянии a метров от центра основания башни, верхушка башни видна под углом высоты α. Определить высоту башни ($a=86{,}6$; $\alpha=22°17'$).

11. Из окна на высоте $h=12\,м$ берега реки видны под углами наклонения $\alpha_1=17°$ и $\alpha_2=45°$. Определить ширину реки.

12. Горная железная дорога поднимается на 1 $м$ на каждые 30 $м$ пути. Найти угол подъема.



Черт. 3.

13. Человек, пройдя по склону холма 1050$м$, поднялся на 90 $м$ над плоскостью основания холма. Определить (в среднем) угол наклона холма.

14. При съемке равномерно подымающейся улицы длиною в 728 $м$ установлена разница высот ее концов в 37,4 $м$. Определить угол подъема и горизонтальную проекцию улицы.

15. На горке стоит шест длиною a метров. Из некоторой точки, находящейся на горизонтальной плоскости основания горки и отстоящей от верхнего конца шеста на расстоянии b метров, этот конец виден под углом α. Определить высоту горки ($a=2$; $b=14$; $\alpha=63°18'$).

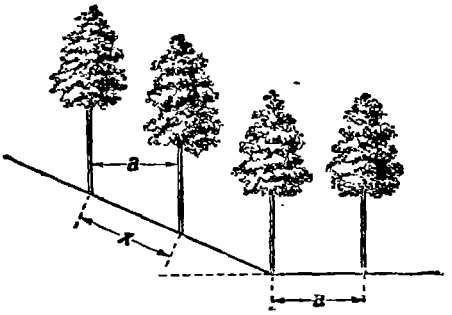
16. Если на горизонтальной поверхности земли предполагается рассаживать деревья на расстоянии a метров одно от другого, то на каком расстоянии одну от другой, соответственно с этим, следует копать ямки для посадки деревьев по склону холма (черт. 4), имеющему наклон к горизонту α ($a=3{,}5$; $\alpha=25°18'$)?

17. На прямой MN взята точка A, и из нее под острым углом α к прямой MN проведен отрезок AB длиною a метров; определить проекцию (x) отрезка AB на прямую MN и проследить изменение этой проекции при изменении угла α от 60° до 0 и обратно: от 0 до 90°.

18. Строение, имеющее 30 *м* высоты, бросает тень длиною в 45 *м*. Определить высоту солнца.

19. В полдень при высоте солнца в 28° фабричная труба бросает тень длиной в 76 *м*. Определить высоту трубы.

20. Какова высота солнца в то время, 1) когда длина тени от стоящего человека равна половине его роста; 2) когда она вдвое больше его роста и 3) когда она в $2\frac{1}{2}$ раза больше его роста?

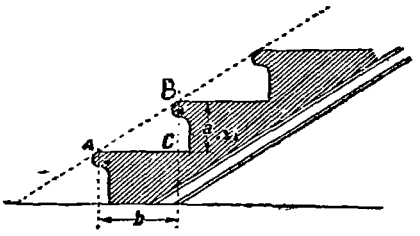


Черт. 4.

21. Тень от вертикального шеста короче его самого на $\frac{1}{n}$ его длины. Какова высота солнца ($n=10{,}5$)?

22. Гаубица H, стреляющая по мишени T с расстояния 2500 *м*, получила приказание перебросить огонь на другую мишень S, находящуюся на расстоянии 1500 *м* от T. На какой угол нужно повернуть орудие, если ST перпендикулярно к HT?

23. Две точки движутся равномерно из вершины прямого угла, одна по одной, а другая по другой стороне этого угла; первая проходит по a метров, а вторая по b метров в секунду. Под каким углом φ к направлению движения первой точки видна из нее вторая точка?



Черт. 5.

24. Каменная домовая лестница (черт. 5) имеет в каждом марше (т. е. между каждыми двумя поворотными площадками) по 15 ступенек, причем полезная ширина каждой ступеньки (так называемая проступь) равна $b=27$ *см*, а высота ступеньки $a=18$ *см*. Определить угол подъема этой лестницы.

25. Ширина каждой ступеньки домовой лестницы равна 25 *см*. Какова должна быть высота ступеньки для того, чтобы угол подъема лестницы был равен 40°?

26. Две прямые улицы пересекаются под углом в 51°50′. Одна из них на расстоянии 1625 *м* от места пересечения должна быть соединена кратчайшим путем со второй. Найти длину этого кратчайшего переулка.

27. Прямая AO, соединяющая некоторую внешнюю точку A с центром O данного круга, имеет длину $c=2{,}53$ *м*. Из точки A проведена к кругу касательная AC, образующая с прямою AO угол $\alpha=38°46'$. Определить длины радиуса (r) и касательной (x).

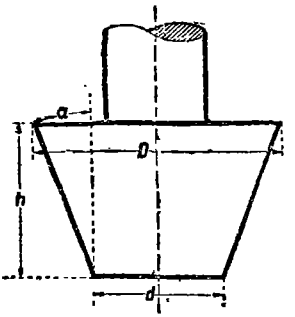
28. Определить радиус круга, описанного около прямоугольного треугольника, у которого катет равен a дециметрам, а прилежащий к нему острый угол равен β.

Задачи, приводящиеся к решению прямоугольных треугольников.

29. Образующая изображенной на чертеже 6 конической части вала имеет подъем в 12%, т. е. на каждые 100 *мм* высоты радиус увеличивается на 12 *мм*. Найти угол подъема α и диаметр D.

30. В усеченном конусе, данном на чертеже 6, известны оба диаметра d и D. Образующая конуса имеет подъем $1:n$. Найти расстояние h между начальной и конечной плоскостями и угол подъема α.

31. Железнодорожная насыпь высотой в 120 *м* имеет 360 *м* ширины при основании и 60 *м* ширины при вершине. Вычислить угол наклона откоса к горизонту.



Черт. 6.

32. Железнодорожная насыпь имеет сверху ширину в 60 *м*, а снизу 240 *м*. Боковые стороны насыпи наклонены к горизонту под углом 35°. Определить высоту насыпи.

33. Поперечный разрез насыпи, при постройке которой был применен наибольший возможный откос $\varphi=39°$, представляет равнобедренную трапецию. Нижнее основание трапеции $a=10$ *м*, высота $h=3$ *м*. Определить верхнее основание трапеции.

34. По основанию b и боковой стороне a равнобедренного треугольника определить угол при основании ($b=28{,}13$; $a=17{,}53$).

35. По основанию b и по высоте h равнобедренного треугольника определить угол при его вершине ($b=31{,}26$ и $h=20{,}75$).

36. В круге радиуса R определить длину хорды, стягивающей дугу в α градусов ($R=4{,}175$; $\alpha=37°42'$).

37. В круге радиуса $R=35{,}8$ *дм* проведена хорда длиною в $a=28{,}7$ *дм*. Найти дугу, стягиваемую хордой, и расстояние хорды от центра.

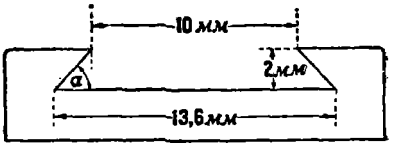
38. Хорда равна $\frac{3}{4}$ диаметра круга. Определить число градусов и минут в дуге, которая стягивается этой хордой.

39. Хорда делит окружность на две части, относящиеся между собой как $m : n$. Длина окружности равна c метрам. Определить расстояние хорды от центра ($m : n = 3 : 7$; $c = 120$).

40. Угол α, вписанный в окружность, опирается на хорду, длина которой a сантиметров. Определить радиус круга.

41. Даны две силы: $P = 4{,}372$ *кг* и $Q = 5{,}645$ *кг*, направленные перпендикулярно друг к другу. Какой угол образует равнодействующая с силой P и чему она равна?

42. Основание равнобедренного треугольника равно b дециметрам, угол при основании равен α. Определить периметр треугольника.

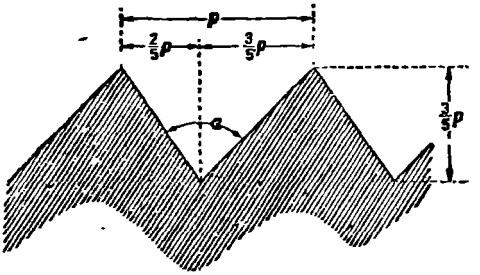


Черт. 7.

43. Основание равнобедренного треугольника равно b дециметрам, а боковая высота равна h дециметрам. Определить угол x при основании треугольника.

44. На чертеже 7 показан паз; определить угол α наклона сторон паза к его основанию.

45. На чертеже 8 показана специальная винтовая нарезка для пушечных замков. Вычислить угол α для заточки резца, служащего для нарезания этой резьбы.



Черт. 8.

46. Три пункта A, B, C расположены так, что их расстояния на карте выражаются следующими числами: $AB = 0{,}85$ *дм*, $AC = 1{,}20$ *дм*, $BC = 1{,}20$ *дм*. Пункт B находится в точности к северу от пункта A. Найти направление из A на C.

47. Плечи прямолинейного рычага имеют 5 *дм* и 15 *дм* длины. На сколько дециметров подымается (по вертикали) каждый конец при повороте рычага на: 1) 40°; 2) 60° и 3) 90° от горизонтального положения?

48. Судно двигалось следующим образом:

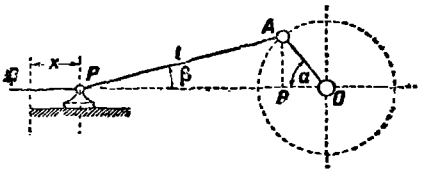
Направление	Пройденное расстояние в *км*
23° СВ	10
37° СВ	13
82° СВ	15

Определить расстояния, которые прошло судно к востоку и к северу от точки отправления.

49. По сторонам a и b прямоугольника определить углы, которые его диагональ образует со сторонами ($a=75{,}2$ *дм*; $b=63{,}6$ *дм*).

50. Стороны прямоугольника равны a и b. Вычислить угол между его диагоналями ($a=13{,}5$ *дм*; $b=7{,}4$ *дм*).

51. В прямоугольнике середины сторон, равных a и b сантиметрам, служат вершинами 4-угольника. Определить углы, которые стороны этого 4-угольника образуют со сторонами прямоугольника ($a=23{,}76$; $b=58{,}28$).



Черт. 9.

52. Диагонали ромба равны d_1 и d_2 сантиметрам ($d_1=28$; $d_2=49$). Вычислить углы.

53. 1) AP (черт. 9) — шатун двигателя и OA — его кривошип. Определить длину OB и AB, если $OA=0{,}4$ *м*, а угол $\alpha=30^\circ$. Затем вычислить угол APB и длину PB проекции шатуна на направляющую, зная, что длина шатуна $l=2$ *м*.

2) Доказать, что между углами α и β, образуемыми шатуном и кривошипом с горизонтальной плоскостью, существует зависимость:

$$\sin\beta=\frac{r}{l}\sin\alpha.$$

3) Найти для различных углов α соответствующий угол β при отношении $\frac{r}{l}=\frac{1}{5}$ ($\alpha=0^\circ$; 10°; 20°; 30°; 40°; 50°; 60°; 70°; 80°; 90°).

4) Почему при значении $\alpha=90^\circ$ угол β (в формуле, данной в п. 2 этой задачи) имеет наибольшую величину?

5) Как велик угол β, когда шатун и кривошип перпендикулярны друг другу?

6) Пусть при $\alpha=0$ точка P занимает положение Q. Показать, что перемещение головки шатуна $QP=x$ может быть вычислено по формуле:

$$x=r\ (1-\cos\alpha)+l\ (1-\cos\beta).$$

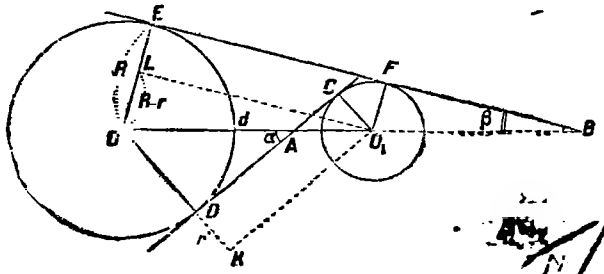
Вычислить величину x для данных выше (п. 3) углов α, если длина кривошипа $l=300$ *мм*, а шатуна $r=1500$ *мм*.

54. Дан круг радиуса r сантиметров. Из точки, отстоящей от центра на расстоянии a сантиметров, проведены две касательные. Определить угол между ними ($r=3{,}35$; $a=8{,}32$).

55. Линия центров двух кругов (черт. 10) равна d сантиметрам, а радиусы их — R и r сантиметрам. Определить углы α и β, под

которыми общие внутренняя и внешняя касательные этих кругов пересекают линию их центров ($R=3{,}065$; $r=1{,}007$; $d=6{,}245$).

56. Из некоторой точки A окружности, радиус которой равен 5 *дм*, проведены две хорды длиною в 7 *дм* и 8 *дм*. Вычислить угол, образуемый этими хордами, рассмотрев два случая: 1) когда хорды находятся по обе стороны радиуса и 2) когда по одну сторону его.

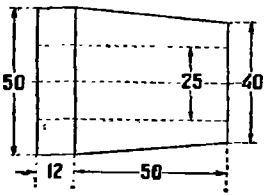


Черт. 10.

57. В равнобедренном треугольнике высота равна h дециметрам а боковая высота равна h_1 дециметрам. Определить угол при основании треугольника ($h=2{,}5$; $h_1=3$).

58. По боковой стороне a сантиметров равнобедренного треугольника и по углу β при вершине определить радиусы кругов описанного (R) и вписанного (r).

59. Катет прямоугольного треугольника равен b метрам, а перпендикуляр, проведенный из вершины прямого угла к гипотенузе, равен h метрам. Определить один из острых углов треугольника, а затем другой катет a и гипотенузу c.



Черт. 11.

60. Определить угол между образующими конуса втулки, показанной на чертеже 11.

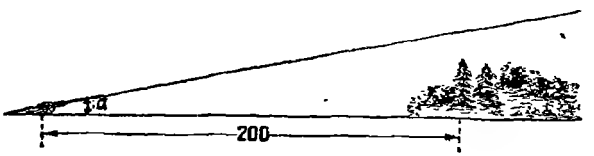
61. Определить (с точностью до 1°) угол между образующими усеченного конуса для следующих конических заточек:

Больший диаметр в *мм* . . .	50	75	75	75	100	100
Меньший » » » . . .	25	25	50	50	25	25
Длина конуса » » . . .	50	75	75	25	40	25

62. По диаметру земного шара, равному 12 740 *км*, и по широте места φ° определить длину окружности параллельного круга, соответствующего этому месту.

Гос. научно-исслед. ин-тут ШКОЛ Наркомпроса РСФСР БИБЛИОТЕКА

63. Какой угол возвышения α (черт. 12) нужно придать орудию при стрельбе через лес, в котором верхушки деревьев на 15 *м* превышают уровень орудия и находятся на расстоянии 200 *м* от орудия, причем к высоте закрытия (в данном случае леса) обычно добавляется 0,01 дистанции, т. е. расстояния от орудия до закрытия?



Черт. 12.

64. Прямая, соединяющая орудие с целью, образует с горизонтом угол, называемый *углом местности*. Вычислить угол местности при стрельбе по цели, находящейся выше уровня орудия на 65 *м*, причем расстояние от орудия до цели, измеренное по карте, масштаб которой $\frac{1}{10\,000}$, оказалось равным 31,5 *см*.

65. *Две точки A и B удалены друг от друга на 15 см; перед ними находится плоское зеркало на расстоянии $a=5$ см от одной точки и $b=7$ см от другой. Как велик угол падения луча, идущего от A и отброшенного в направлении к B?*

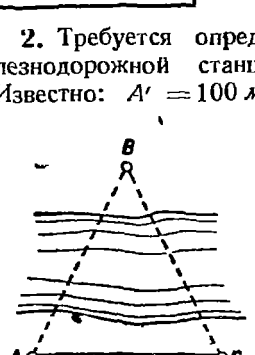
§ 7. Решение косоугольных треугольников.

Теорема синусов.

1. Решить треугольник по следующим данным:

1) $a=109$; $\beta=33°24'$; $\gamma=66°59'$;
2) $c=16$; $\alpha=143°8'$; $\beta=22°37'$.

2. Требуется определить расстояние между заводом A и железнодорожной станцией B по другую сторону реки (черт. 13). Известно: $A'=100$ *м*; $\angle BAC=74°$; $\angle BCA=44°$. Найти AB.

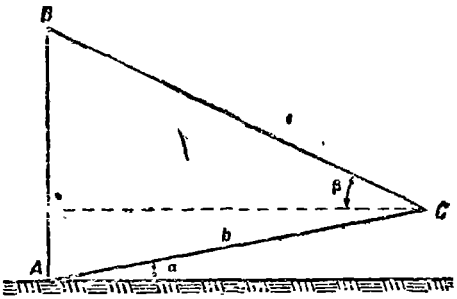


Черт. 13.

Черт. 14.

3. Чтобы найти высоту фабричной трубы, к основанию которой нельзя подойти, измерили базис $AC = 11{,}0$ *м*, продолжение которого упирается в основание трубы (черт. 14). Угол $BAD = 49°$; $\angle BCD = 35°$. Высота угломерного снаряда равна 1,37 *м*. Чему равна высота трубы?

4. Для определения высоты вертикального предмета AB от основания его A проведен базис AC, равный b метрам, повышающийся от A к C под углом $\alpha°$ к плоскости горизонта (черт. 15). Из конца B базиса верхушка предмета видна под углом высоты $\beta°$. Определить высоту предмета.



Черт. 15.

5. На горе, склон которой понижается к горизонту под углом $\beta°$, стоит дерево. Тень дерева, падающая на склон горы при высоте солнца $\alpha°$, имеет длину l метров. Определить высоту дерева.

6. Одна из диагоналей параллелограма равна d и делит его угол на части в $\alpha°$ и $\beta°$. Определить стороны параллелограма.

7. В треугольнике даны сторона a и два прилежащих к ней угла $\beta°$ и $\gamma°$. Определить биссектрисы l_a, l_b и l_c всех углов треугольника.

8. Чтобы определить ширину реки, непосредственно у воды по берегу реки провешили базис AB длиною c метров и наметили дерево C, стоящее на другом берегу у самой воды; затем измерили $\angle CAB = \alpha°$ и $\angle ABC = \beta°$. Вычислить ширину реки против дерева C ($c = 400$; $\alpha = 45°$; $\beta = 30°$).

9. В треугольнике ABC даны: $\angle A = \alpha°$, $\angle C = \gamma°$ и высота $AD = h_a$ метрам. Определить длину его сторон.

Площадь треугольника.

10. Для определения площади треугольника ABC измерили две его стороны a и b и угол между ними γ. Вычислить площадь ($a = 125$ *м*; $b = 160$ *м*; $\gamma = 52°$).

11. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна b, а угол при вершине — α. Определить площадь ($b = 10$ *м*; $\alpha = 75°20'$).

12. Если длины двух сторон треугольника a и b будут оставаться постоянными, угол же γ, составленный ими, будет изменяться в пределах от 0 до 180°, то при каком значении γ площадь треугольника будет наибольшей?

13. Доказать, что площадь параллелограма равна произведению двух смежных сторон его на синус угла между ними.

14. Доказать, что площадь всякого 4-угольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

15. Определить площадь ромба по его стороне a и по углу α ($a=7{,}5\ см$; $\alpha=22°10'$).

16. Определить площадь Q прямоугольника по длине его диагонали d и по углу φ между диагоналями. Определить максимум Q при изменении φ от 0 до 180°.

17. Основания трапеции a и b, боковая сторона c, прилежащий к ней угол α. Определить площадь трапеции.

18. Площадь параллелограма $12\ дм^2$, стороны его $a=3{,}7\ дм$ и $b=4{,}2\ дм$. Определить углы параллелограма.

19. Площадь треугольника $71{,}24\ см^2$; стороны его $a=15\ см$ и $b=13\ см$. Определить угол между ними.

20. Определить площадь участка земли, имеющего вид треугольника, одна из сторон которого c, а две другие образуют с первой углы α и β ($c=20$; $\alpha=65°30'$; $\beta=84°30'$).

21. Две из прямолинейных границ лесного участка сходятся под углом $BAC=\alpha$. Требуется от этого участка отрезать площадь DAE в Q кв. метров при помощи прямой DE, наклоненной к стороне AC под углом $AED=\gamma$. Такую прямую легко провешить, если будут известны стороны AE и AD. Определить длину этих сторон.

22. В треугольнике ABC даны: угол $C=\gamma$ и высоты, проведенные из углов A и B, h_a и h_b. Определить площадь треугольника.

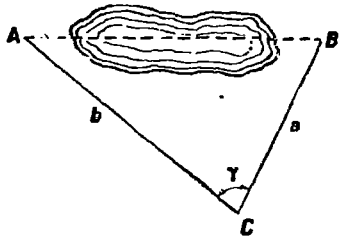
23. Определить площадь треугольника по двум углам α и β и по высоте h_b.

Теорема косинусов.

24. В треугольнике ABC дано: $b=7$; $c=10$; $\alpha=56°29'$. Найти a.

25. Решить треугольник ABC по следующим данным:

1) $a=10$; $b=15$; $\gamma=123°17'$;
2) $a=0{,}2$; $c=0{,}6$; $\beta=23°28'$;
3) $c=40$; $a=100$; $\beta=16°28'$.



Черт. 16.

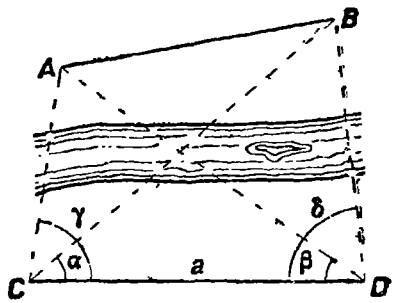
26. Чтобы определить расстояние между двумя пунктами A и B, между которыми пройти было нельзя (черт. 16), выбрали третий пункт C так, что из него были видны и доступны оба пункта A и B; затем измерили расстояние $BC=a$, $AC=b$ и угол $ACB=\gamma$. Вычислить AB ($a=100\ м$; $b=80\ м$; $\gamma=48°57'$).

27. В треугольнике ABC даны стороны $a=3$, $b=4$, $c=6$. Найти угол γ.

28. Стороны параллелограма 4,0 *м* и 5,0 *м*. Угол его 52°. Найти обе диагонали.

29. Две силы: $P=100$ *кг* и $Q=200$ *кг* приложены к материальной точке под углом $\alpha=50°$ друг к другу. Определить величину равнодействующей R и углы, которые она составляет с силами P и Q.

30. Для определения расстояния между двумя недоступными пунктами A и B (черт. 17) измерили базис CD, не проходящий между пунктами A и B и равный a метрам, и углы $ACD=\gamma$, $BCD=\alpha$, $ADC=\beta$ и $BDC=\delta$. Вычислить AB, если $a=2000$; $\alpha=52°40'$; $\beta=42°1'$; $\gamma=86°40'$; $\delta=81°15'$.



Черт. 17.

§ 8. Формулы приведения.

1. Синус, косинус, тангенс и котангенс углов

a) 162°30'; b) 230°; c) 335°

привести к *тем же* функциям острого угла.

2. Синус, косинус, тангенс и котангенс углов

a) 25°30'20"; b) 130°; c) 250°; d) 340°

заменить сходными по названию функциями острого угла.

3. Тригонометрические функции углов

a) 75°; b) 150°; c) 200°; d) 315°

заменить так, чтобы угол не превышал 45°.

Привести к наименьшему положительному аргументу:

4. a) $\sin 2000°$; b) $\sin(-1000°)$; c) $\cos 1500°$; d) $\cos(-2900°)$.

5. e) $\operatorname{tg} 600°$; f) $\operatorname{tg}(-40°)$; g) $\operatorname{ctg} 1305°$; h) $\operatorname{ctg}(-300°)$.

6. i) $\sec 1900°$; k) $\sec(-2150°)$; l) $\operatorname{cosec} 500°$; m) $\operatorname{cosec}(-80°)$.

7. a) $\sin(-7{,}3\pi)$; b) $\cos\frac{34}{9}\pi$; c) $\operatorname{tg}(-\frac{79}{11}\pi)$; d) $\operatorname{cosec}(-0{,}6\pi)$.

Вычислить:

8. a) $\sin(-1350°)$; b) $\cos 720°$; c) $\operatorname{tg} 900°$; d) $\operatorname{ctg}(-450°)$.

9. a) $\sin\frac{19}{6}\pi$; b) $\cos\frac{11}{2}\pi$; c) $\operatorname{tg}\frac{16}{3}\pi$; d) $\sec 9\pi$.

10. Тригонометрические функции угла 50° выразить через функции его смежного угла.

Упростить выражения в задачах 11—21):

11. $\sin(90^\circ+\alpha)+\cos(180^\circ-\alpha)+\operatorname{tg}(270^\circ+\alpha)+\operatorname{ctg}(360^\circ-\alpha)$.

12. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi-\alpha)+\operatorname{tg}(\pi-\alpha)-\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

13. $\sin^2(270^\circ-\alpha)+\sin^2(360^\circ-\alpha)$.

14. $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)$.

15. $a^2+b^2+2ab\cdot\cos(180^\circ-\alpha)$.

16. $\frac{\sin(-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(-\alpha)}$.

17. $\frac{\operatorname{cosec}(-\alpha)\cdot\operatorname{cosec}(90^\circ+\alpha)}{\sec(-\alpha)\cdot\sec(180^\circ+\alpha)}$.

18. $\frac{\sin(\pi+\alpha)\cdot\sec\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)\cdot\sec(2\pi-\alpha)}$.

19. $\sin 160^\circ\cdot\cos 110^\circ+\sin 250^\circ\cdot\cos 340^\circ+\operatorname{tg}110^\circ\cdot\operatorname{tg}340^\circ$.

20. $\frac{\sin(90^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{tg}132^\circ\cdot\operatorname{cosec}222^\circ\cdot\sin 90^\circ}{\cos(180^\circ+\alpha)\cdot\sec 312^\circ\cdot\operatorname{ctg}48^\circ\cdot\cos 180^\circ}$.

21. $\frac{\operatorname{tg}(270^\circ-\alpha)\cdot\sin 130^\circ\cdot\operatorname{cosec}220^\circ\cdot\sin 270^\circ}{\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha)\cdot\cos 50^\circ\cdot\sec 320^\circ\cdot\cos 360^\circ}$.

22. Преобразовать тригонометрические функции следующих углов: a) $\alpha-90^\circ$; b) $\alpha-180^\circ$; c) $\alpha-270^\circ$; d) $\alpha-360^\circ$.

23. Определить $\cos x$ из уравнения:

$$3\sin^2(360^\circ-x)-7\sin(x-90^\circ)+3=0.$$

24. Определить $\sin x$, если $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\frac{\pi}{2}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

25. Определить $\operatorname{tg} x$ из уравнения:

$$\sin(2\pi-x)\cos(\pi-x)+\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)-\sin^2(2\pi-x)=0.$$

Решить уравнения (в задачах 26—30):

26. $\sin^2(270^\circ-x)+2\cos(360^\circ-x)=3$.

27. $\sin(x-90^\circ)=-\sin(x-180^\circ)$.

28. $\cos(\pi+x)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

29. $\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. **30.** $\sin(x+90^\circ)=-\operatorname{ctg}(360^\circ-x)$.

§ 9. Теорема сложения.

Синус и косинус суммы и разности.

1. Вычислить $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=0{,}625$ и $\sin\beta=0{,}8$.

2. Разложить и упростить:

a) $\sin(\alpha+60^\circ)+\sin(\alpha-60^\circ)$;

b) $\cos(30^\circ+\alpha)-\cos(30^\circ-\alpha)$.

3. Дано: $\cos\alpha=0{,}6$; $0<\alpha<90^\circ$. Найти $\sin(\alpha+30^\circ)$.

4. Дано: $\sin\alpha=\sqrt{0{,}2}$; $0<\alpha<90°$; найти $\cos(60°+\alpha)$.

5. Дано: $\cos\alpha=0{,}5$; $\sin\beta=-0{,}4$; $270°<\alpha<360°$; $180°<\beta<270°$. Найти $\sin(\alpha-\beta)$ и $\cos(\alpha+\beta)$.

6. Дано: $\sin\alpha=\frac{2}{3}$; $\cos\beta=-\frac{3}{4}$; α во II четверти, β — в III. Найти $\sin(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$.

7. Найти $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=0{,}6$ и $\sin\beta=0{,}8$.

8. Углы α и β положительные острые:

$$\cos\alpha=\frac{1}{7};\ \cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}.$$ Определить $\cos\beta$.

9. Вычислить: a) $\sin 75°$ и $\cos 75°$, заменяя $75°$ через $45°+30°$; b) $\sin 15°$ и $\cos 15°$, заменяя $15°$ через $45°-30°$.

10. Формулы, выражающие $\sin(\alpha\pm\beta)$ и $\cos(\alpha\pm\beta)$, применить к случаям: a) $\alpha=0,90°; 180°; 270°; 360°$; b) $\beta=90°; 180°; 270°; 360°$; c) $\alpha=\beta$.

11. Если углы α и β положительные и $\alpha+\beta<90°$, то $\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$. Доказать это: 1) по чертежу и 2) по формуле.

12. $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ и $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ выразить:

a) через $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$; b) через $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\beta$.

13. Разложить $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ и $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

14. Дано: $\sin\alpha=\frac{3}{5}$; $\sin\beta=\frac{12}{13}$; $\sin\gamma=\frac{7}{25}$, где α, β и γ — острые углы. Найти $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ и $\cos(\alpha+\beta-\gamma)$.

Тангенс суммы и разности.

15. Разложить и упростить $\operatorname{tg}(45°\pm\alpha)$.

16. Найти $\operatorname{tg}105°$ $(=60°+45°)$.

17. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=3$; $0<\alpha<90°$; найти $\operatorname{tg}(45°-\alpha)$.

18. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$ и $\operatorname{tg}\beta=-2$, где угол α — в III четверти, а β — в IV. Найти $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ и $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$.

19. $\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)$ выразить через $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\beta$.

20. $\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)$ выразить: a) через $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\beta$; b) через $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$.

21. Разложить $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$.

Упростить следующие выражения (в задачах 22—26):

22. $\frac{\sin(\alpha-\beta)+2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)}$.

23. $\frac{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$.

24. $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$

25. $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}$.

26. $\dfrac{\sin(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ+\alpha)}$.

Доказать тождества (в задачах 27—40):

27. $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

28. $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

29. $\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\beta\cdot\cos\beta$.

30. $(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\beta-\cos\beta)=\sin(\beta-\alpha)-\cos(\beta+\alpha)$.

31. $\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\beta-\cos(\alpha+\gamma)\cdot\sin\gamma=$
$=\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\beta-\sin(\alpha+\gamma)\cdot\cos\gamma$.

32. а) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$; б) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\cos'\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$.

33. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha=\operatorname{cosec}2\alpha$.

34. $\sin\alpha-\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

35. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$.

36. $\cos\alpha+\cos(120^\circ-\alpha)+\cos(120^\circ+\alpha)=0$.

37. $\dfrac{1}{2}(\cos\alpha+\sqrt{3}\cdot\sin\alpha)=\cos(60^\circ-\alpha)$.

38. Если $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$ и $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{1}{3}$, причем углы α и β острые, то $\alpha+\beta=45^\circ$. Доказать.

39. Если α, β и γ — острые углы, тангенсы которых $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{5}$ и $\dfrac{1}{8}$, то $\alpha+\beta+\gamma=45^\circ$. Доказать.

40. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{1}{7}$; α и β — острые углы. Доказать, что $\alpha+\beta=135^\circ$.

Решить уравнения (в задачах 41—54):

41. $\sin(x+30^\circ)+\cos(x-30^\circ)=0$.

42. $\cos(\alpha+x)\cos(\alpha-x)+0{,}75=\cos^2\alpha$.

43. $\cos(\alpha-\beta)\sin(\gamma-x)=\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin(\gamma+x)$.

44. $\operatorname{tg}(x+45^\circ)+\operatorname{tg}(x-45^\circ)=2\operatorname{ctg}x$.

45. $\sin(x+\alpha)+\sin(x-\alpha)=\cos\alpha$.

46. $\sin(\alpha-x):\cos(\alpha+x)=a:b$.

47. $\operatorname{tg}(x+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(x-\alpha)=m$.

48. $\sin 2x\cdot\cos x=\cos 2x\cdot\sin x$

49. $\sin x\cdot\sin 2x=\cos x\cdot\cos 2x$.

50. $\cos 2x\cdot\cos 3x=\cos 5x$.

51. $\sin(\alpha+x)-\cos x\cdot\sin\alpha=\cos\alpha$.

52. $2\sin x=\sin(45^\circ-x)$.

53. $\sin(45^\circ-x)=\dfrac{1}{2}\cos(45^\circ+x)$.

54. $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=\dfrac{1}{2}$.

§ 10. Умножение и деление аргумента.

Формулы умножения.

1. Вычислить: a) $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}8$; b) $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -3$.

2. В равнобедренном треугольнике sin угла при основании равен $\frac{5}{13}$; определить sin и cos угла при вершине.

3. Если $0 < 2\alpha < 90°$, то $\sin 2\alpha < 2\sin\alpha$. Доказать это: 1) по чертежу и 2) по формуле.

4. Дано: $\sin\alpha = 0{,}8$; $90° < \alpha < 180°$. Найти $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$.

5. Дано: $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$; $270° < \alpha < 360°$. Найти $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$.

6. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 3$, где α принадлежит III четверти. Найти $\operatorname{tg} 2\alpha$.

7. $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ выразить: a) только через $\sin\alpha$; b) только через $\cos\alpha$.

8. $\operatorname{ctg} 2\alpha$ выразить: a) через $\operatorname{ctg}\alpha$ и b) через $\operatorname{tg}\alpha$.

9. $\sec 2\alpha$ выразить через $\sec\alpha$.

10. a) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ выразить через $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$; b) $\operatorname{tg}\alpha$ выразить через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

11. $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ выразить через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

12. Показать, что *все* тригонометрические функции угла α выражаются *рационально* через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

13. Дано: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

14. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{2} + 1$. Найти $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ $\operatorname{tg} 2\alpha$.

15. $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$ и $\operatorname{tg} 3\alpha$ выразить соответственно через $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

16. $\sin 4\alpha$ и $\cos 4\alpha$ выразить через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

Формулы деления

17. Вычислить $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $180° < \alpha < 270°$ и $\sin\alpha = -0{,}6$.

18. Найти синус, косинус тангенс и котангенс угла 15°, полагая $15° = \frac{30°}{2}$. (Результаты сравнить с полученными в задаче 9 § 9.)

19. Найти синус, косинус, тангенс и котангенс угла $22°30'\left(=\frac{45°}{2}\right)$.

20. В равнобедренном треугольнике косинус угла при вершине равен $-\frac{7}{25}$; определить синус и косинус угла при основании.

21. Вычислить $\sin\frac{\alpha}{4}$, если $450^\circ < \alpha < 540^\circ$ и $\sin\alpha = \frac{336}{625}$.

22. Вычислить $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$, если $45^\circ < \frac{\alpha}{4} < 90^\circ$ и $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

23. Если $\cos\alpha = \frac{40}{41}$ и $\cos\beta = \frac{60}{61}$, причем углы α и β положительные острые, то $\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{41\cdot 61}$. Проверить.

24. Проверить: $\operatorname{tg} 7^\circ 30' = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$.

25. Выразить $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ через $\sin\alpha$.

26. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ выразить соответственно через $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

27. Определить $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$.

Доказать тождества (в задачах 28 — 51):

28. а) $2\sin(90^\circ - \alpha)\sin\alpha = \sin 2\alpha$; b) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = -\cos 2\alpha$.

29. а) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$; b) $\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \sin\alpha$.

30. а) $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \sin 2\alpha$; b) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \cos 2\alpha$.

31. $\cos^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) - \cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta = 1$.

32. $\frac{\cos\alpha}{\sec\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\alpha$.

33. $\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} = -\frac{1}{4}\sin 2\alpha$.

34. а) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{cosec} 2\alpha$; b) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg} 2\alpha$.

35. а) $\sin 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \cos 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$; b) $\sin 2\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = -\cos 2\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$.

36. $\frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$.

37. $\operatorname{tg}(\alpha+45^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha-45^\circ) = 2\operatorname{tg} 2\alpha$.

38. $2\sin(45^\circ+\alpha)\cdot\sin(45^\circ-\alpha) = \cos 2\alpha$.

39. $\frac{1-\operatorname{tg}^2(45^\circ-\alpha)}{1+\operatorname{tg}^2(45^\circ-\alpha)} = \sin 2\alpha$.

40. $\sin 3\alpha\operatorname{cosec}\alpha - \cos 3\alpha\cdot\sec\alpha = 2$.

41. $4\sin\alpha\cdot\sin(60^\circ-\alpha)\cdot\sin(60^\circ+\alpha) = \sin 3\alpha$.

42. $4\cos\alpha\cdot\cos(60^\circ-\alpha)\cdot\cos(60^\circ+\alpha) = \cos 3\alpha$.

43. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha) = \operatorname{tg} 3\alpha$.

44. $\frac{\sin 3\alpha + \sin^3\alpha}{\cos 3\alpha - \cos^3\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha$. **45.** $\frac{\operatorname{tg}^3\alpha - \operatorname{tg}^2 60^\circ}{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2 60^\circ} = \operatorname{tg} 3\alpha\cdot 3\operatorname{ctg}\alpha$.

46. а) $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; b) $1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.

47. а) $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$; b) $1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.

48. $\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. 49. $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$.

50. Если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{7}$ и $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$, причем углы α и β острые то $\alpha+2\beta=45^\circ$. Доказать.

51. Если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{7}$ и $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$, то $\cos 2\alpha=\sin 4\beta$. Проверить.

Решить уравнения (в задачах 52—74):

52. $\sin x\cdot\cos x=0{,}25$.
53. $\sin^2 x-\cos^2 x=0{,}5$.
54. $1-\operatorname{tg}^2 x=2\operatorname{tg} x$.
55. $\sin 2x=\sin x$.
56. $a\cdot\sin x=b\cdot\cos\frac{x}{2}$.
57. $1+\sin^2 2x=4\sin^2 x$.
58. $\cos 2x=\cos x$.
59. $\cos 2x=2\sin^2 x$.
60. $\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg} x$.
61. $\operatorname{tg} 2x=3\operatorname{tg} x$.
62. $a(1+\cos x)=b\cdot\cos\frac{x}{2}$
63. $1-\cos x=\sin\frac{x}{2}$.
64. $a(1+\cos x)=b\cdot\sin x$.
65. $1-\cos x=\sin x$.
66 $1+\sec x=m\cdot\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$.
67. $1+\sec x=\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}$.
68. $\sin 3x=2\sin x$.
69. $\cos 3x=4\cos^2 x$.
70. $\sin x\cdot\sin 3x=\frac{1}{2}$.
71. $\cos^3 x\cdot\sin 3x+\sin^3 x\cdot\cos 3x=\frac{3}{4}$.

В уравнениях 72—74 $\sin x$ и $\cos x$ выразить *предварительно* по формулам задачи 11.

72. $\sin x+\cos x=1\frac{1}{4}$.
73. $4\sin x+3\cos x=2$.
74. $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{3}$.

§ 11. Преобразование алгебраической суммы тригонометрических функций в произведение. Вспомогательный угол.

Привести к виду, удобному для логарифмирования, и упростить:

1. a) $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ$; b) $\sin 78^\circ-\sin 42^\circ$;
   c) $\cos 152^\circ+\cos 28^\circ$; d) $\cos 48^\circ-\cos 12^\circ$.
2. a) $\sin 5^\circ+\sin 20^\circ$; b) $\sin 3^\circ-\sin 5^\circ$;
   c) $\cos 3^\circ 15'+\cos 17^\circ$; d) $\cos 5^\circ-\cos 25^\circ$.
3. a) $\sin(30^\circ+\alpha)+\sin(30^\circ-\alpha)$; b) $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.
4. a) $\frac{\sin 25^\circ+\sin 15^\circ}{\sin 25^\circ-\sin 15^\circ}$; b) $\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}$.
5. a) $\sin 20^\circ+\cos 40^\circ$; b) $\cos 20^\circ-\sin 20^\circ$; c) $\sin\alpha-\cos\beta$.
6. a) $\sin\alpha+\cos\alpha$; b) $\sin\alpha-\cos\alpha$.
7. a) $\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta$; b) $\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta$; c) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta$; d) $\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta$.

8. а) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$; b) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$.
9. а) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta$; b) $\cos^2\alpha-\cos^2\beta$.
10. а) $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta$; b) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta$; c) $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta$; d) $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha$.
11. а) $1+\sin\alpha$; b) $\sin\alpha-1$; c) $1-2\sin^2\alpha$; d) $1-2\cos^2\alpha$.
12. $\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha$.
13. $\operatorname{tg}\alpha-\sec\alpha$.
14. $\operatorname{cosec}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$.
15. а) $1\pm\operatorname{tg}\alpha$; b) $1\pm\operatorname{ctg}\alpha$.
16. $1\pm\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$.
17. а) $\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}$; b) $\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}$.
18. $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}$.
19. а) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin\beta\cdot\cos\beta$; b) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\beta\cdot\cos\beta$.
20. а) $1+\sin\alpha+\cos\alpha$; b) $1-\sin\alpha-\cos\alpha$.
21. $1-2\cos\alpha+\cos 2\alpha$.
22. а) $1+\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha$; b) $\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha-1$.
23. а) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha$; b) $1+\sin\alpha-\cos\alpha-\operatorname{tg}\alpha$.
24. а) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha$; b) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha-\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha$
25. а) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)$; b) $\sin\alpha-\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)$.
26. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$.

Доказать тождества (в задачах 27—38):

27. $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}=\operatorname{ctg}\dfrac{\beta-\alpha}{2}$. **28.** $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\beta$.

29. а) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$; b) $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$.

30. $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$.

31. $\dfrac{\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}^2\left(45^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

32. а) $\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\sin 2\alpha$; b) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha}=\cos 2\alpha$.

33. $\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}=2\sin\dfrac{\alpha}{2}$ (если $0<\alpha<90^\circ$).

34. $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

35. а) $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=4\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

b) $(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2=4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

36. а) $1-\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}$;

b) $1-\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\beta=-\dfrac{\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta}$.

37. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\operatorname{tg}3\alpha.$

38. $\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}3\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha.$

Доказать, что при условии $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ (например для углов треугольника) имеют место следующие соотношения (в задачах 39—49 К этим номерам в ответах имеются указания).

39. a) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;

b) $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

40. a) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$;

b) $\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma=-1+4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

41. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$.

42. $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{cosec}\alpha\cdot\operatorname{cosec}\beta\cdot\operatorname{cosec}\gamma$.

43. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

44. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=1$.

45. $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma=1$.

46. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$.

47. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$.

48. $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$.

49. $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=-1-4\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$.

Выражения 50—62 преобразовать для логарифмического вычисления с помощью некоторых простых углов:

50. $1+2\sin\alpha$. **51.** $1-2\cos\alpha$. **52.** $\sqrt{3}-2\sin\alpha$.

53. a) $\sqrt{2}+2\cos\alpha$; b) $\sqrt{2}\cdot\sin\alpha-1$. **54.** $3-4\sin^2\alpha$.

55. $3-4\cos^2\alpha$. **56.** $1-3\operatorname{tg}\alpha$.

57. $3-\operatorname{ctg}^2\alpha$. **58.** $1+\cos\alpha+\cos 2\alpha$

59. a) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$; b) $\cos\alpha-\cos 2\alpha+\cos 3\alpha$.

60. Преобразовать с помощью вспомогательного угла:

1) $\sqrt{a^2+b^2}$ при $a>0$ и $b>0$;

2) $\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ при $p>2\sqrt{q}>0$.

61. Предполагая, что $a>b>0$, преобразовать с помощью вспомогательного угла:

1) $\frac{a+b}{a-b}$; 2) $\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$; 3) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$

62. Применить вспомогательный угол к вычислению:

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha}.$$

Следующие уравнения (63—75) решить, преобразуя сумму или разность функций в произведение:

63. $\sin 3x + \sin x = 0$.
64. $\cos 4x + \cos x = 0$.
65. $\sin 5x = \sin x$.
66. $\cos 2x = \cos x$.
67. $\cos 3x = \sin x$.
68. $\sin x + \cos x = 1$.
69. $\cos x - \sin x = 1 : \sqrt{2}$.
70. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2(1 + \sqrt{5})$.
71. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 2(1 - \sqrt{2})$.
72. $\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} 4x = 2$.
73. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = \sec x \cdot \sec 3x$.
74. $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$.
75. $\sin 3x = \sin 2x - \sin x$.

Найти истинную величину следующих выражений, принимающих при данной подстановке неопределенный вид:

76. $\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}$ при $\alpha = 0$.
77. $\dfrac{\cos^2\alpha}{(1+\sin\alpha)^2}$ при $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$.
78. $\dfrac{\sec^2\alpha - 1}{\operatorname{tg}\alpha}$ при $\alpha = \pi$.
79. $\sec^2\alpha(\operatorname{cosec}^2\alpha - 1)$ при $\alpha = 90°$.
80. $\dfrac{1-\cos\alpha}{1-\sec\alpha}$ при $\alpha = 2\pi$.
81. $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha}$ при $\alpha = 135°$.
82. $\dfrac{\sin(180° - \alpha) + \cos(270° + \alpha)}{\operatorname{tg}(180° + \alpha)}$ при $\alpha = 0$.
83. $\operatorname{tg}^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$ при $\alpha = \pi$.
84. $\dfrac{\sin^2\alpha \cdot \sin 2\beta - \sin^2\beta \cdot \sin 2\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$ при $\beta = \alpha$.
85. $\dfrac{\cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}$ при $\alpha = 45°$.
86. $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin 2\alpha$ при $\alpha = 180°$.
87. $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ при $\alpha = \pi$.
88. $\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$ при $\alpha = 90°$.
89. $\dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$ при $\beta = \alpha$.
90. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}$ при $\beta = \alpha$.

§ 12. Применение логарифмических таблиц к вычислению тригонометрических выражений и к нахождению углов.

Ответы задач этого параграфа, а также §§ 12 и 13 даны по пятизначным таблицам. Однако при решении их можно пользоваться и четырехзначными таблицами. В этом случае необходимо округлять и числа, данные в условии и полученные в ответе, оставляя лишь 4 значащих цифры и отбрасывая секунды. При этом необходимо

иметь в виду, что иногда возможно расхождение в ответах на 1 — 2 единицы последнего разряда.

Найти по таблицам:

1. a) $\lg \sin 21°37'$; b) $\lg \sin 63°42'$, c) $\lg \sin 21°11'12''$;
   d) $\lg \sin 47°12'23''$; e) $\lg \sin 53°15''$; f) $\lg \sin 1°23'18''$.
2. a) $\lg \cos 32°8'$; b) $\lg \cos 50°22'$; c) $\lg \cos 44°53'36''$;
   d) $\lg \cos 62°47'25''$; e) $\lg \cos 30°48''$; f) $\lg \cos 89°36'20''$.
3. a) $\lg \operatorname{tg} 27°41'$; b) $\lg \operatorname{tg} 16°7'35''$; c) $\lg \operatorname{tg} 70°42'53''$;
   d) $\lg \operatorname{tg} 14°15''$; e) $\lg \operatorname{tg} 52'12''$; f) $\lg \operatorname{tg} 89°10'16''$.
4. a) $\lg \operatorname{ctg} 80°53'$; b) $\lg \operatorname{ctg} 20°26'48''$; c) $\lg \operatorname{ctg} 77°21'13''$;
   d) $\lg \operatorname{ctg} 45°36''$; e) $\lg \operatorname{ctg} 87°59'34''$; f) $\lg \operatorname{ctg} 15'40''$.

Найти острый угол, если дано:

5. $\lg \sin x =$ a) $9{,}40006 - 10$; b) $9{,}86342 - 10$; c) $9{,}67466 - 10$;
   d) $9{,}93410 - 10$; e) $9{,}87114 - 10$; f) $7{,}86616 - 10$.
6. $\lg \cos x =$ a) $9{,}86152 - 10$; b) $8{,}93007 - 10$; c) $9{,}94970 - 10$;
   d) $9{,}84932 - 10$; e) $9{,}80800 - 10$; f) $8{,}05840 - 10$.
7. $\lg \operatorname{tg} x =$ a) $8{,}78649 - 10$; b) $0{,}00657$; c) $9{,}46075 - 10$;
   d) $0{,}07710$; e) $0{,}00015$; f) $7{,}35000 - 10$.
8. $\lg \operatorname{ctg} x =$ a) $1{,}03675$; b) $9{,}50180 - 10$; c) $0{,}37380$;
   d) $9{,}33875 - 10$; e) $9{,}99995 - 10$; f) $8{,}00000 - 10$.

Вычислить с помощью логарифмов:

9. a) $\sin 20°$; b) $\cos 47°36'\,28''$; c) $\operatorname{tg} 75°36''$;
   d) $\operatorname{ctg} 15'$; e) $\sec 40°$; f) $\operatorname{cosec} 53°2'43''$.
10. a) $\sin 230°$; b) $\cos 740°$; c) $\operatorname{tg}(-250°10')$;
    d) $\operatorname{ctg} 1000°15'\,20''$; e) $\sec(-100°)$; f) $\operatorname{cosec} 500°20'\,45''$.

Найти острый угол, если дано:

11. a) $\sin x = \frac{4}{7}$; b) $\cos x = 0{,}38934$; c) $\operatorname{tg} x = 4$;
    d) $\operatorname{ctg} x = 10$; e) $\sec x = 1{,}5$; f) $\operatorname{cosec} x = 2{,}65047$;
    g) $\sin x = \frac{1}{2} \sin 20°$; h) $\operatorname{ctg} x = 3 \operatorname{ctg} 48°$.

Найти углы, содержащиеся между 0 и 360°, если дано:

12. $\sin x = \frac{5}{11}$.
13. $\sin x = -0{,}682$.
14. $\cos x = 0{,}76213$.
15. $\cos x = -0{,}5688$.
16. $\operatorname{tg} x = \frac{176}{353}$.
17. $\operatorname{tg} x = -2{,}48$.
18. $\operatorname{ctg} x = 5$.
19. $\operatorname{ctg} x = -0{,}731$.
20. $\sec x = 15$.
21. $\sec x = -2{,}5$.
22. $\operatorname{cosec} x = 10$.
23. $\operatorname{cosec} x = -1\frac{2}{7}$.

В задачах 24—31 определить значение x с наименьшей абсолютной величиной (положительное или даже отрицательное, если его *абсолютная величина меньше*).

24. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ$.
25. $\operatorname{ctg} x = 1 + \sin 23^\circ 14' 48''$.
26. $\cos x = 1 - \operatorname{ctg} 66^\circ 12'$.
27. $\sin x = \sin 37^\circ 15' - 1$.
28. $\cos x = 1 + \operatorname{tg} 117^\circ$.
29. $\operatorname{tg} x = \sin 44^\circ + \cos 163^\circ$.
30. $\operatorname{ctg}(-x) = 1 - \cos(-20^\circ) \cdot \sec 70^\circ 46'$.
31. $\sin(x + 180^\circ) = \sqrt[3]{-\operatorname{tg} 152^\circ 28''}$.

Вычислить следующие выражения (в задачах 32—34):

32. $(a^2 - b^2) \cdot \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \cdot \cos\beta}$, если $a = 7{,}3862$; $b = 5{,}2138$; $\alpha = 42^\circ 26'$ $\beta = 68^\circ 34' 45''$.
33. $(a + \sin\alpha) \cdot (a + \cos\alpha)$ при $a = 0{,}00105$ и $\alpha = 143^\circ 12' 18''$.
34. $a^2 \cdot \sec\alpha \cdot \sqrt[4]{-\operatorname{tg} 2\alpha}$ при $a = 0{,}020438$ и $\alpha = 67^\circ 34' 30''$.

Вычислить следующие выражения (в задачах 35—41), преобразовав их сначала в произведение:

35. $x = \pi \cdot (\sin 30^\circ 53' 30'' + \sin 80^\circ 24')$.
36. $x = \dfrac{\sqrt[3]{0{,}0001}}{\cos 16^\circ 41' 25'' - \sin 49^\circ 10' 35''}$.
37. $x = \left(16\dfrac{768}{815}\right)^2 \cdot (1 + \sin 11^\circ 7' 20'')$.
38. $x = \sqrt{2 \cdot (1 - \operatorname{tg} 61^\circ 38' 42'')}$.
39. $x = \sqrt[4]{0{,}005} \cdot (1 + 2\sin 41^\circ 19')$.
40. $x = (2{,}7148)^3 \cdot \sqrt{3 - 4\cos^2 72^\circ 5'}$.
41. $x = \sqrt{a^2 \cdot \sin^2\alpha + b^2 \cdot \cos^2\alpha}$, если $a = 0{,}014806$; $b = 0{,}003984$; $\alpha = 36^\circ 15' 24''$.

Решение прямоугольных треугольников.

В задачах 42—57. Основные случаи решения прямоугольных треугольников.

I. Даны гипотенуза и острый угол:

42. $c = 9{,}35$; $A = 65^\circ 14'$.
43. $c = 627$; $A = 23^\circ 30'$.
44. $c = 0{,}79792$; $A = 66^\circ 36' 24''$.
45. $c = 3{,}6435$; $A = 50^\circ 0' 12''$.

II. Даны катет и острый угол:

46. $a = 6{,}37$; $A = 4^\circ 35'$.
47. $a = 18{,}003$; $B = 43^\circ$.
48. $b = 0{,}1738$; $A = 35^\circ 55' 24''$.
49. $b = 0{,}29544$; $B = 25^\circ 37' 48''$.

III. Даны гипотенуза и катет:

50. $c = 65$; $a = 16$.
51. $c = 113$; $b = 15$.
52. $c = 697$; $a = 528$.
53. $c = 1710{,}2$; $b = 823$.

IV. Даны оба катета:

54. $a=261$; $b=380$. **55.** $a=156$; $b=133$.

56. $a=0{,}097836$; $b=0{,}10003$.

57. $a=12{,}007$; $b=6{,}9194$.

58—69. Равнобедренный треугольник.

Обозначения: $a=c$ — боковая сторона; b — основание; $A=C$ — угол при основании; B — угол при вершине; h — высота; h_1 — боковая высота; $2p$ — периметр; S — площадь.

Решить равнобедренный треугольник по следующим данным:

58. $a=797{,}92$; $A=66°36'24''$. **59.** $a=627$; $B=133°$.

60. $b=15{,}658$; $A=59°45'20''$. **61.** $b=5{,}529$; $B=51°11''$.

62. $a=8{,}757$; $b=13{,}958$. **63.** $b=925{,}22$; $h=721{,}4$.

64. $A=65°40'$; $h_1=20$. **65.** $b=130{,}72$; $S=1955{,}8$.

66. $B=73°0'14''$; $S=45\,038$. **67.** $2p=40{,}65$; $A=72°46'38''$.

68. $S=250$; $a:b=7:4$. **69.** $S=56$; $a=14$.

§ 13. Решение косоугольных треугольников с применением логарифмов.

Обозначения: a, b и c — стороны треугольника; A, B и C — противоположные им углы; S — площадь; $2p$ — периметр; R — радиус описанного круга; r — радиус вписанного круга; h_a, l_a и m_a — высота, биссектриса и медиана, соответствующие стороне a.

Основные случаи решения косоугольных треугольников.

I. Даны сторона и два угла:

1. $a=370$; $B=86°3'$; $C=50°55'36''$.

2. $a=450$; $A=87°55'$; $B=10°52'51''$.

3. $a=951$; $B=126°43'$; $C=13°41'8''$.

4. $a=97{,}515$; $A=102°48'$; $C=21°6'$.

5. $b=13{,}024$; $A=11°48'45''$; $B=133°42'15''$.

6. $c=15\,948$; $A=51°38'31''$; $B=18°19'29''$.

II. Даны две стороны и угол между ними:

7. $a=510$; $b=317$; $C=76°18'52''$.

8. $a=225$; $b=800$; $C=36°44'$.

9. $a=2{,}296$; $c=1{,}687$; $B=29°51'46''$.

10. $b=28$; $c=42$; $A=124°$.

11. $a=30{,}986$; $c=69{,}014$; $B=87°47'16''$.

12. $b=40{,}326$; $c=32{,}114$; $A=73°40'$.

III. Даны две стороны и угол против одной из них:

13. $a=87$; $b=65$; $A=75°45'$.

14. $a=34$; $b=93$; $A=14°15'$.

15. $a=24$; $b=83$; $A=26°45'$.
16. $b=360$; $c=309$; $C=21°14'25''$.
17. $a=13\,897$; $c=8{,}425$; $A=126°42'36''$.
18. $a=0{,}4366$; $b=1{,}2987$; $B=11°3'20''$.
19. $a=13{,}807$; $c=8{,}136$; $C=14°36'32''$.
20. $b=263.09$; $c=215{,}4$; $B=70°14'42''$.
21. $a=19\,058$; $b=28{,}193$; $A=31°16'47''$.
22. $a=457{,}08$; $b=169{,}93$; $B=21°49'45''$.
23. $a=2579{,}8$; $c=10$; $A=130°21'35''$.

IV. Даны три стороны:

24. $a=19$; $b=34$; $c=49$.
25. $a=89$; $b=321$; $c=395$.
26. $a=44$; $b=483$; $c=485$.
27. $a=0{,}099$; $b=0{,}101$; $c=0{,}158$.
28. $a=172{,}5$; $b=1134{,}7$; $c=1205{,}4$.
29. $a=421{,}63$; $b=409{,}87$; $c=335{,}94$.
30. $a=1{,}2345$; $b=2{,}3456$; $c=3{,}4567$.

Особые случаи решения косоугольных треугольников.

I. В числе данных только *один* элемент размера [1]):

31. $R=7{,}9235$; $A=113°17'$; $B=48°16'44''$.
32. $S=501{,}97$; $A=15°28'40''$; $B=45°0'23''$.
33. $h_a=5{,}3708$; $B=115°10'27''$; $C=5°8'33''$.
34. $l_a=0{,}75868$; $B=98°31'$; $C=4°25''$.
35. $a+b=m=488{,}8$; $A=70°24'$; $B=40°16'$.
36. $a-b=n=23$; $A=108°$; $B=18°$.
37. $h_a+h_b=m=1{,}3807$; $A=102°32'40''$; $B=58°17'20''$.
38. $h_b-h_c=n=60{,}8$; $B=46°23'51''$; $C=80°28'23''$.
39. $2p=420{,}76$; $A=24°37'4''$; $B=52°30'56''$.
40. $r=5$; $A=22°37'10''$; $B=39°18'28''$.
41. $c=1{,}2304$; $a:b=3:4$; $B=48°$.
42. $a=63{,}516$; $b:c=9:11$; $A=95°30'$.
43. $c=226{,}88$; $h_c:b=63:65$; $B=17°4'$.
44. $a=15{,}988$; $A=46°20'35''$; $b=a_c$ (a_c — проекция a на c).

II. В числе данных *два* элемента размера:

45. $b=29$; $l_c=31$; $A=68°43'$.
46. $S=2423{,}4$; $a=42{,}5$; $B=124°38'$.
47. $a=32$; $b=25$; $A=2B$.
48. $a+b=36{,}5$; $R=19{,}063$; $A-B=19°31'18''$.
49. $a+b=m=2147$; $c=353$; $C=13°41'8''$.
50. $a-b=n=6{,}457$; $c=18{,}309$; $C=53°40'$.
51. $a+b=m=14{,}317$; $c=5{,}189$; $A=102°38'$.

[1]) То есть только один отрезок или площадь.

52. $a-b=n=6{,}232$; $c=15{,}146$; $A=78°40'$.
53. $S=15$; $ab=48$; $\sin A=\cos B$.
54. $h_b=60$; $h_c=36$; $a:R=\cos A$.

III. Даны *три* элемента размера:

55. $a=23$; $b=45$; $R=25{,}093$.
56. $a=120$; $b=29$; $h_c=23{,}762$.
57. $a=6$; $b=8$; $S=12$.
58. $b=98$; $c=76$; $m_c=68$. **59.** $a=20$; $b=12$; $m_c=14$.
60. $h_a=8$; $h_b=12$; $h_c=18$. **61.** $b=42$; $c=28$; $l_a=12{,}809$.

§ 14. Тригонометрические уравнения.

Из уравнений 1—12 определить величину x в *общем виде* и от 0 до 360° (от 0 до 2π):

1. $3\sin x=2\cos^2 x$.
2. $\sin x=\operatorname{ctg} x$.
3. $3+2\cos x=4\sin^2 x$.
4. $\sin x=-\cos x$.
5. $\operatorname{tg} x=3\operatorname{ctg} x$.
6. $\operatorname{tg} x=2\sin x$.
7. $\operatorname{ctg} x=3\cos x$.
8. $\operatorname{cosec} x=2\sin x$.
9. $\sin 3x=0{,}5$.
10. $\operatorname{ctg}\frac{2x}{5}=1$.
11. $3\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}=1$.
12. $2\sin\left(\frac{x}{6}-\frac{\pi}{2}\right)=1$.

13. Найти зависимость между углами α и β в следующих случаях:

1) $\sin\alpha=\sin\beta$; 5) $\sin\alpha=-\sin\beta$; 9) $\sin\alpha=\cos\beta$;
2) $\cos\alpha=\cos\beta$; 6) $\cos\alpha=-\cos\beta$; 10) $\sin\alpha=-\cos\beta$;
3) $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta$; 7) $\operatorname{tg}\alpha=-\operatorname{tg}\beta$; 11) $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta$;
4) $\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta$; 8) $\operatorname{ctg}\alpha=-\operatorname{ctg}\beta$; 12) $\operatorname{tg}\alpha=-\operatorname{ctg}\beta$.

Решить уравнения (14 — 73):

14. $\operatorname{ctg} 10x=0$.
15. $(\cos x)^{\sin x}=1$.
16. $\sin^2 x-\cos^2 x=\cos x$.
17. $a(\sin x+\cos x)^2=b\sin 2x$.
18. $\operatorname{tg} px+\operatorname{tg} qx=0$.
19. $\sin 3x=-\cos x$.
20. $\sin 5x\cdot\operatorname{tg} 4x\cdot\cos 2x=0$.
21. $a\sin x+b\cos x=0$.
22. $\sin x+\cos x=\operatorname{cosec} x$.
23. $5\cos 2x=4\sin x$.
24. $\cos\frac{x}{2}+\cos x=1$.
25. $\sin(m+x)+\sin x=\cos\frac{m}{2}$.
26. $\sin 3x+\sin 2x+\sin x=0$.
27. $\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x}+\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x}=2$.
28. $a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=\sqrt{a^2+b^2}$.
29. $a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=c$.
30. $2\sin x-9\cos x=7$.
31. $\frac{1+\sin x}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$.
32. $14{,}36\sin x+23\cos x=26{,}02$.

33. $\sqrt{3}\cdot\sin x+\cos x=\sqrt{2}$. **34.** $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x=2$.

35. $\sec x=\sin x+\cos x$.

36. $\sin x+\cos x=\sec x+\operatorname{cosec} x$.

37. $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}=2-\operatorname{tg} x$. **38.** $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\sec 80^\circ$.

39. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=3\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

40. $(4-\sqrt{3})(\sec x+\operatorname{cosec} x)=4(\sin x\cdot\operatorname{tg} x+\cos x\cdot\operatorname{ctg} x)$.

41. $\sin(x+30^\circ)\cdot\sin(x-30^\circ)=\sin 30^\circ$.

42. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}(45^\circ+x)=2$.

43. $\cos(a-b)\cdot\sin(c-x)=\cos(a+b)\cdot\sin(c+x)$.

44. $\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg}(x-45^\circ)\cdot\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}(x+45^\circ)$.

45. $\sec^2 x+3\sec x\cdot\operatorname{cosec} x+\operatorname{cosec}^2 x=4$.

46. $\operatorname{tg} 3x=\sin 6x$. **47.** $\sqrt{2}\cdot\cos 2x=\cos x+\sin x$.

48. $4\sin^2 x+\sin^2 2x=3$. **49.** $2\sin^2 x+\sin^2 2x=2$.

50. $\sin^2 2x-\sin^2 x=\sin^2 30^\circ$. **51.** $\cos 4x+\cos 2x+\cos x=0$.

52. $\cos x-\cos 2x=\sin 3x$.

53. $a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=a\cdot\sin 2x-b\cdot\cos 2x$.

54. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x$.

55. $\operatorname{ctg}(\pi-3x)=\operatorname{tg}(x-\pi)$. **56.** $\cos\dfrac{x}{2}+\cos x=1$.

57. $\operatorname{cosec} x=\operatorname{cosec}\dfrac{x}{2}$.

58. $\sec^2\dfrac{x}{2}+\operatorname{cosec}^2\dfrac{x}{2}=16\operatorname{ctg} x$.

59. $8\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}=1+\sec x$.

60. $\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}=1+\sin 2x$.

61. $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$. **62.** $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x=0$.

63. $\cos x\cdot\cos 3x=\cos 5x\cdot\cos 7x$.

В уравнениях 64—72 данные выражения следует *предварительно* сократить (иначе получатся посторонние корни):

64. $\dfrac{\cos 2x}{1+\operatorname{tg} x}=0$. **65.** $\dfrac{\cos 2x}{1-\sin 2x}=0$.

66. $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} 2x=0$. **67.** $\sin 3x\cdot\operatorname{ctg} x=0$

68. $\dfrac{\sin 2x}{\sin x}=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$. **69.** $\dfrac{1+\cos 2x}{2\cos x}=\dfrac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$.

70. $\dfrac{1-\cos 2x}{2\sin x}=\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$. **71.** $\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} 2x=2$.

72. $\sin 3x\cdot\operatorname{tg} 2x\cdot\sec x=0$. **73.** $3\sin x=1-\sqrt{3\cos^2 x-2}$.

Решить системы уравнений (74—95):

74. Найти $\sin x$ и $\sin y$, если $\sin x+\sin y=0{,}2$ и $\cos x+\cos y=-0{,}2$.

75. Определить $\cos x$ и $\cos y$ из системы:

$$\cos(x+y)=\frac{1}{6}(1-2\sqrt{6});\quad \cos(x-y)=\frac{1}{6}(1+2\sqrt{6}).$$

76. Найти $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} y$, если $x+y=45^\circ$ и $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=10$.

77. Выразить x через a, b и φ с помощью системы:

$$a=x\cdot\sin\alpha;\quad b=x\cdot\sin\beta;\quad \alpha+\beta=\varphi.$$

78. Определить x и y, если $\sin(x-y)=\cos(x+y)=\frac{1}{2}$.

Определить *острые* углы из следующих систем (79—95):

79. $\sin x\cdot\cos y=0{,}36$; $\cos x\cdot\sin y=0{,}14$.

80. $\sin x\cdot\sin y=0{,}36$; $\cos x\cdot\cos y=0{,}14$.

81. $x+y=a$; $\sin x+\sin y=a$.

82. $x+y=77^\circ$; $\cos x-\cos y=0{,}4898$.

83. $x+y=a$; $\sin x\cdot\sin y=a$.

84. $x-y=48^\circ 20'$; $\cos x\cdot\cos y=0{,}48967$.

85. $x+y=a$; $\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{m}{n}$.

86. $x+y=96^\circ 38'$; $\frac{\cos x}{\cos y}=\frac{5}{3}$.

87. $x+y=a$; $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=a$.

88. $x-y=31^\circ$; $\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y=0{,}74$.

89. $x+y=a$; $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y=a$.

90. $x-y=5^\circ$; $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y=0{,}8391$.

91. $x+y=a$; $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}=\frac{m}{n}$.

92. $x-y=3^\circ 46'$; $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}=\frac{11}{9}$.

93. $2^{\sin x+\cos y}=1$; $16^{\sin^2 x+\cos^2 y}=4$.

94. $x+y+z=180^\circ$; $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y=2$; $\operatorname{tg} y\cdot\operatorname{tg} z=3$.

95. $x+y+z=180^\circ$; $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y=3$; $\operatorname{tg} y\cdot\operatorname{tg} z=14$.

§ 15. Обратные круговые функции.

(См. также § 2, №№ 30—34.)

Указание. При решении этих задач надо помнить о границах принятых arcus'ов и отбрасывать как *посторонние* те из получаемых ответов, которые не соответствуют этим границам.

Найти, чему равны следующие выражения (1—16):

1. 1) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 2) $\operatorname{arc\,sec} 2$; 3) $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2. 1) $\sin\left(\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$; 2) $\cos\left(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$.

3. 1) $\operatorname{ctg}[\operatorname{arc\,tg}(-1)]$; 2) $\sin\left(3\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

3) $\cos\left[2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$.

4. 1) $\cos(\operatorname{Arc\,cos} x)$; 2) $\sin\left(\operatorname{Arc\,tg}\frac{3}{4}\right)$; 3) $\sin\left[\operatorname{arc\,tg}(-2)\right]$.

5. 1) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\cos\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$; 3) $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3})$.

6. 1) $\operatorname{arc\,ctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{5}\right)$; 2) $\operatorname{Arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$; 3) $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)$.

7. 1) $\sin\ \arccos 0{,}8)$; 2) $\cos\left(\arcsin\frac{8}{17}\right)$; 3) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

8. 1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}\right)$;

2) $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

9. 1) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg} 2+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)$.

10. $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2a-b}{b\sqrt{3}}+\operatorname{arc\,tg}\frac{2b-a}{a\sqrt{3}}\right)$.

11. $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{8}{17}\right)$.

12. $\cos\left(\arccos\frac{9}{\sqrt{82}}+\operatorname{arc\,cosec}\frac{\sqrt{41}}{4}\right)$.

13. $\cos\left(2\arcsin\frac{2}{7}\right)$. **14.** $\sin\ 2\arcsin m$.

15. $\operatorname{tg}\left(3\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}\right)$. **16.** $\sin(2\operatorname{arc\,tg} m)$.

Проверить справедливость следующих равенств (17 — 32):

17. a) $\arcsin\frac{3}{5}=\arccos\frac{4}{5}$; b) $\arcsin\sqrt{\frac{a}{a+b}}=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a}{b}}$.

18. $\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{12}{13}=\frac{\pi}{2}$.

19. $\arccos\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{7}=\arccos\left(-\frac{11}{14}\right)$.

20. $\arcsin 0{,}6-\arcsin 0{,}8=-\arcsin 0{,}28$.

21. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$. **22.** $\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arc\,ctg}\frac{3}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

23. $2\arccos a=\arccos(2a^2-1)$.

24. $2\arcsin m=\arccos(1-2m^2)$.

25. $2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4}=\operatorname{arc\,tg}\frac{32}{43}$.

26. $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$.

27. $2 \operatorname{arc tg} \sqrt{\frac{x}{a}} = \arccos \frac{a-x}{a+x}$.

28. $\arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = \arccos \frac{2}{11}$.

29. $\operatorname{arc tg} m + \operatorname{arc tg} n = \arccos \frac{1-mn}{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}$.

30. $\operatorname{arc ctg} \sqrt{3} + \operatorname{arc ctg} (2+\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4}$.

31. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arc tg} \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{arc tg} (\sqrt{2}+1)^2$.

Решить уравнения (32—45):

32. $\operatorname{arc tg} (1+x) + \operatorname{arc tg} (1-x) = \frac{\pi}{4}$.

33. $\arccos (x-1) = 2 \arccos x$.

34. $\operatorname{arc tg} x = 2 \operatorname{arc tg} \frac{1}{x}$.

35. $\arccos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{arc tg} (x-1)$.

36. $\arcsin 2x = 3 \arcsin x$.

37. $x = \operatorname{Arc sin} (\cos x)$.

38. $2x = \operatorname{arc ctg} (\operatorname{tg} x)$.

39. $\arcsin x + \arcsin \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}$.

40. $\arcsin x + \arcsin x\sqrt{3} = \frac{\pi}{2}$.

41. $\arccos x + \arccos (1-x) = \arccos (-x)$.

42. $\operatorname{arc tg} x + \operatorname{arc tg} 3x = \frac{\pi}{2}$.

43. $\operatorname{arc tg} \frac{1}{x-1} - \operatorname{arc tg} \frac{1}{x+1} = \operatorname{arc tg} a$.

44. $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} + \operatorname{arc tg} \frac{2x}{1-x^2} = \frac{4\pi}{3}$.

45. $\operatorname{arc tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{arc sec} 5x = \frac{\pi}{4}$.

ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ, ТРЕБУЮЩИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ.

§ 16. Прямые и плоскости.

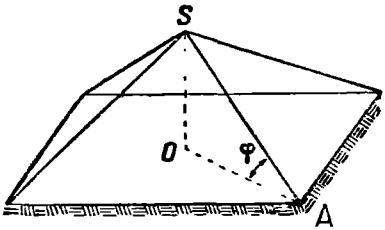
Перпендикуляр и наклонные к плоскости.

1. Угол между перпендикуляром и наклонной, проведенными из точки M к плоскости P, равен α. Длина наклонной равна a. Определить расстояние точки M от плоскости ($a=11{,}22$; $\alpha=72^\circ 54'$).

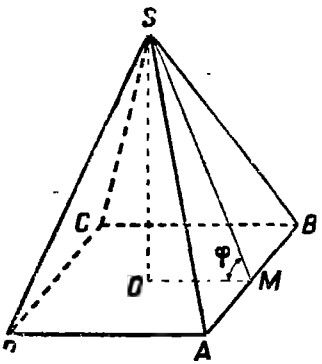
2. К плоскости проведен перпендикуляр длиною l; из основания его, как из центра, описана в плоскости окружность радиуса r. Определить угол между перпендикуляром и прямой, соединяющей его вершину с любой точкой окружности ($p=4{,}54$; $r=8$).

3. Через центр O квадрата, сторона которого $AB=a$, проведен перпендикуляр к плоскости квадрата; на нем взят отрезок $OM=d=20$, а из M проведен отрезок $MC\perp AB$. Вычислить угол x между MC и его проекцией OC на плоскость квадрата.

4. Ребро куба $a=10$ *см*. Вычислить угол, под которым диагональ куба наклонена к его грани.



Черт. 18.



Черт. 19.

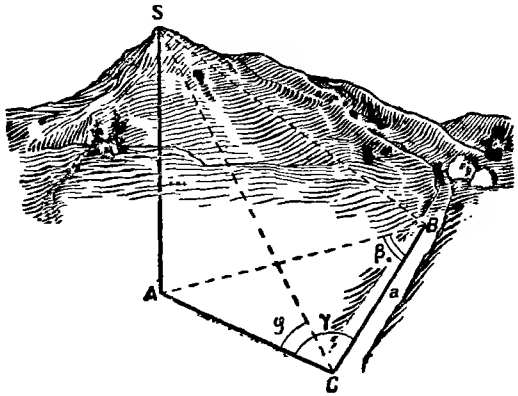
5. Над квадратной силосной ямой нужно сделать крышу в виде правильной 4-угольной пирамиды. Сторона основания равна 6,5 *м*. Высота крыши должна быть равна 2,5 *м*. Определить длину стропильной ноги SA и угол наклона ее к плоскости основания (черт. 18).

6. Высота правильной четырехугольной пирамиды 7 *см*, сторона основания 8 *см*. Под каким углом боковое ребро наклонено к плоскости основания?

7. Шатер, имеющий вид правильной четырехугольной пирамиды, состоит из 4 жердей, обтянутых брезентом (черт. 19). Вышина шатра SO равна 2,4 *м*; расстояние между основаниями двух ближайших жердей $AB=2$ *м*. Определить расстояние SM от вершины шатра до средины стороны основания, т. е. апофему пирамиды, и угол ее наклонения к горизонтальной земной поверхности.

8. Из центра O правильного треугольника ABC, сторона которого равна a, восставлен перпендикуляр, на нем взята точка M так, что отрезок $MA=a$; затем из M проведен отрезок $MD \perp AC$. Вычислить угол φ между MD и плоскостью треугольника ABC.

9. Прямая образует с плоскостью угол α; через вершину этого угла проведена в данной плоскости вторая прямая под углом β к проекции первой прямой на плоскость. Определить угол между этими прямыми ($\alpha=43°53'$; $\beta=11°10'$).



Черт. 20.

10. Прямая, находящаяся вне плоскости, пересекаясь с прямою, лежащей в плоскости, образует с этой прямою угол α, а эта последняя образует угол β с проекцией первой прямой на плоскость. Определить угол первой прямой с плоскостью ($\alpha=8°26'$; $\beta=5°40'$).

11. Из центра окружности, описанной около треугольника со сторонами a, b и c, восставлен к плоскости этого треугольника перпендикуляр h. Определить углы, образованные с этой плоскостью прямыми, соединяющими вершину перпендикуляра с вершинами треугольника ($h=60$; $a=30$; $b=5$; $c=29$).

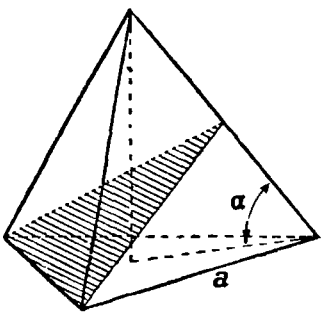
12. По горизонтальной плоскости проходит прямолинейный отрезок дороги BC длиною a метров. Рядом с дорогой находится гора, вершина которой видна из точки C под углом φ (черт. 20). Вершина S проектируется на плоскость дороги в точку A. Отрезок BC составляет с лучами, проведенными из его концов в точку A, углы: $\angle ACB=\gamma$ и $\angle ABC=\beta$. Определить высоту горы ($a=400$; $\beta=40°10'$; $\gamma=60°40'$; $\varphi=50°50'$).

13. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол α (черт. 21). Определить площадь сечения, проведенного через сторону основания и середину бокового ребра.

Параллельные прямые и плоскости.

14. Концы отрезка $AB=a=13$ *см* отстоят от данной плоскости на расстояниях $m=5$ *см* и $n=8$ *см*. Определить угол между отрезком и плоскостью (2 случая).

15. Из двух точек плоскости проведены две параллельные наклонные AM и BN под углом α к плоскости (черт. 22); прямая MN, пересекающая их перпендикулярно, образует с плоскостью угол β. Определить угол φ наклонных с прямой AB, соединяющей их следы.

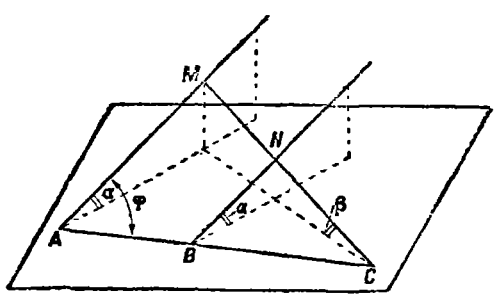


Черт. 21.

16. Из двух точек плоскости удаленных на расстояние a, проведены две параллельные наклонные под углом φ к плоскости. Определить расстояние между ними, если расстояние между их проекциями на плоскость равно b.

17. Отрезок AB параллелен плоскости. Из его концов проведены к плоскости две наклонные: $AC=c$ и $BD=d$. Наклонная AC составляет с плоскостью угол α. Определить угол наклонной BD с этой плоскостью ($c=\sqrt{6}$; $d=3$; $\alpha=60°$).

18. Из концов параллельного плоскости отрезка восставлены к нему перпендикуляры под углами α и β ($\alpha>\beta$) к плоскости. Длина отрезка равна a, расстояние между точками пересечения плоскости с восставленными перпендикулярами равно b. Определить расстояние от плоскости до отрезка (два случая).

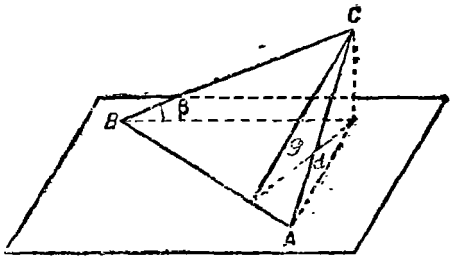


Черт. 22.

19. Отрезки двух прямых линий, заключенные между двумя параллельными плоскостями, относятся как 2 : 3, а их углы с плоскостью — как 2 : 1. Определить эти углы.

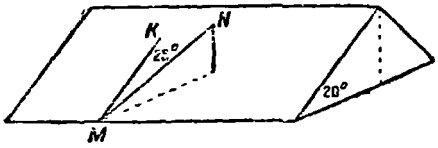
§ 17. Двугранные и многогранные углы.

1. Дан двугранный угол α. Из точки, лежащей на одной грани этого угла на расстоянии a от ребра, восставлен перпендикуляр до пересечения с другой гранью. Определить длину этого перпендикуляра ($a = 6{,}06$; $\alpha = 41°55'$).



Черт. 23.

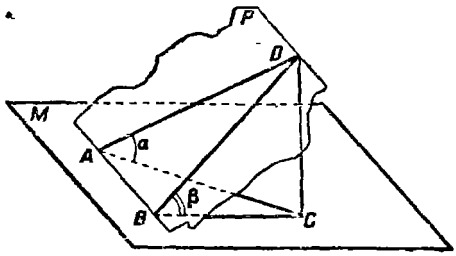
2. 1) Прямоугольный треугольник ABC расположен так, что гипотенуза его AB лежит в плоскости P, а катеты образуют с плоскостью P углы α и β (черт. 23). Определить угол φ между плоскостью треугольника и плоскостью P. 2) Одна сторона (AB) треугольника ABC лежит на плоскости P. Две другие стороны (CA и CB) составляют с плоскостью P углы α и β, тангенсы которых соответственно равны $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$, а проекции этих сторон на ту же плоскость взаимно перпендикулярны. Определить наклон треугольника ABC к плоскости P.



Черт. 24.

3. На крыше, имеющей наклон в 20°, проведена прямая MN (черт. 24) под углом 25° к линии наибольшего ската MK (линией наибольшего ската служит перпендикуляр к горизонтальной линии, проведенной на плоскости). Найти угол x между MN и горизонтом.

4. По склону горы с наклоном в 32° идет дорога, составляющая 45° с линией наибольшего ската (см. задачу 3). Найти уклон дороги.



Черт. 25.

5. Из точки A плоскости M проведена наклонная AD под углом α к плоскости (черт. 25); через AD проведена плоскость P под углом $DBC = \beta$ к плоскости M. Определить угол между AD и линией пересечения плоскостей M и P.

6. В правильной n-угольной пирамиде высота вдвое менее стороны основания. Определить двугранный угол φ при основании.

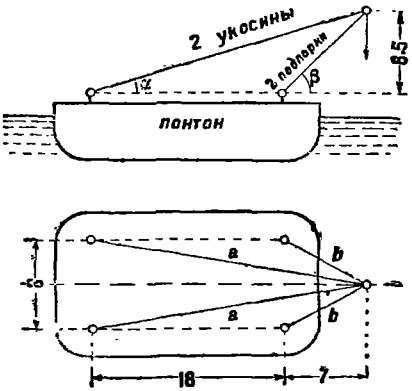
7. На чертеже 26 дана схема плавучего понтонного крана (понтон — железная плоскодонная лодка), спроектированного на вертикальную и горизонтальную плоскости. Размеры даны в метрах. Определить:

a) длину укосин a и длину подпорок b;

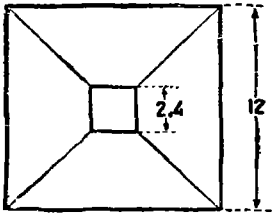
b) углы наклона укосин и подпорок к плоской поверхности понтона;

c) угол между укосинами и угол между подпорками;

d) угол между плоскостью укосин и плоскостью понтона; угол между плоскостью подпорок и плоскостью понтона.



Черт. 26.



Черт. 27.

8. Покрытие квадратного здания дано на плане (черт. 27); размеры даны в метрах. Верхняя площадка покрытия расположена на высоте, равной $\frac{1}{3}$ ширины здания (считая от основания крыши). Все четыре ската наклонены под одним и тем же углом к горизонтальной плоскости. Чему равен угол наклона покрытия?

9. В прямоугольном треугольнике даны гипотенуза a и острый угол α. Определить расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол φ с плоскостью треугольника.

10. Основанием пирамиды служит правильный треугольник; из двух граней одна перпендикулярна к основанию, а две другие наклонены к нему под углом α. Как наклонены к плоскости основания боковые ребра?

11. Прямая AB параллельна плоскости P. Прямая CD пересекает AB под углом α и образует с плоскостью P угол φ. Определить угол плоскости P с плоскостью прямых AB и CD.

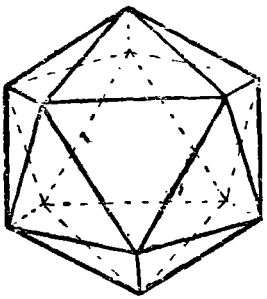
12. Концы ребер прямоугольного бруса, исходящих из одной

вершины, соединены прямыми. Площади треугольников, образовавшихся на гранях бруса, равны: 4 $дм^2$; 6 $дм^2$; 12 $дм^2$. Найти угол между сечением бруса и меньшим основанием.

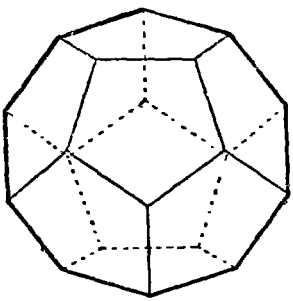
13. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания и боковое ребро относятся как $\sqrt{3} : \sqrt{2}$. Через диагональ основания проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Определить наклон этой плоскости к основанию.

14. Параллелограм и плоскость P расположены так, что одна из меньших сторон параллелограма находится в плоскости P, а противоположная ей удалена от плоскости P на расстояние, равное расстоянию между бо́льшими сторонами параллелограма. Определить угол между плоскостью P и плоскостью параллелограма, если стороны параллелограма относятся как 3 : 5.

15. В правильной n-угольной пирамиде плоский угол при вершине равен α; определить ее двугранные углы (при основании и между боковыми гранями).



Черт. 28.



Черт. 29.

16. Вычислить угол между двумя смежными гранями:
1) правильного тетраэдра;
2) » октаэдра;
3) » икосаэдра (черт. 28);
4) » додекаэдра (черт. 29).

§ 18. Площадь проекции фигуры на плоскость.

1. Площадь параллелограма $Q = 50$ $см^2$. Плоскость его образует с плоскостью проекций P угол в 30°. Одна сторона параллелограма лежит в плоскости P. Найти площадь проекции параллелограма.

2. В прямой треугольной призме через одну из сторон основания проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро и отклоненная от плоскости основания на 45°. Определить площадь сечения, если площадь основания равна Q.

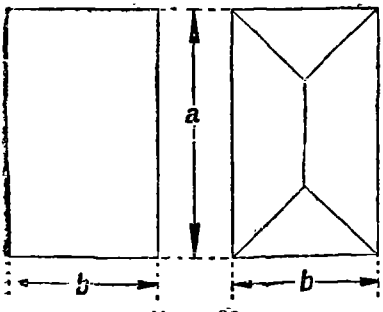
3. В правильной треугольной призме через сторону основания проведена плоскость сечения под углом α к плоскости основания. Сторона основания равна a. Найти площадь сечения.

4. Площадь пропускающего трубу отверстия в крыше равна 2100 *см*². Угол наклона крыши 32°. Труба имеет форму квадратной призмы. Найти сторону основания призмы.

5. Размеры трубы 40 *см* × 40 *см*. Угол наклона крыши 35°. Найти площадь отверстия в крыше.

6. Четырехскатная крыша перекрывает площадь в 28 *м*². Все скаты крыши наклонены к потолку под углом 32°53′. Найти площадь крыши.

7. Боковой скат четырехскатной крыши представляет собою равнобочную трапецию, параллельные стороны которой 10 *м* и 6 *м*; высота трапеции равна 5 *м*. Площадь проекции ската на плоскость потолка равна 32 *м*². Найти угол наклона ската и высоту конька над потолком.



Черт. 30.

8. На чертеже 30 даны планы односкатной и четырехскатной крыш в виде прямоугольников со сторонами a и b; скаты обеих крыш наклонены к горизонту под углом α. На которую из них потребуется больше материала для окраски?

9. Яркость освещения зависит от угла, образуемого световыми лучами с освещаемой поверхностью. Пусть освещаемая площадь равна O, а угол световых лучей с освещаемой плоскостью — α. На какую площадь падали бы те же световые лучи, если бы освещаемая площадь была перпендикулярна к световым лучам? Меньше или больше будет эта площадь предыдущей? Ярче или темнее она будет освещена?

10. Какую горизонтальную площадь можно покрыть крышей с наклоном в 27°30′ и с площадью 120 *м*²?

§ 19. Параллелепипеды, призмы, пирамиды и их поверхность.

Параллелепипеды и призмы.

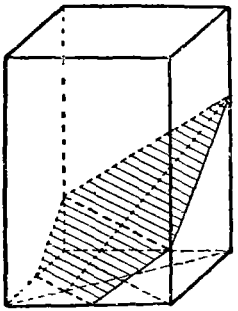
1. Углы, образуемые диагональю прямоугольного параллелепипеда с его ребрами, равны α, β и γ.

1) Доказать, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

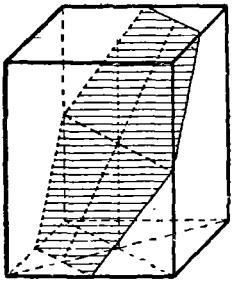
2) Вычислить γ, если $\alpha = 31°10'$ и $\beta = 69°10'$.

2. Правильную четырехугольную призму требуется пересечь так, чтобы в сечении получился ромб с острым углом α. Определить положение секущей плоскости.

3. В правильной четырехугольной призме (черт. 31) через середины двух последовательных сторон основания проведена плоскость, пересекающая три боковых ребра и наклоненная к плоскости основания под углом α. Сторона основания равна a. Определить площадь полученного сечения.



Черт. 31.



Черт. 32.

4. В правильной четырехугольной призме (черт. 32) проведена плоскость через середину оси и середины двух последовательных сторон основания. Зная, что сторона основания равна a, а боковое ребро b, определить: 1) площадь полученного сечения и 2) угол между проведенной плоскостью и плоскостью основания.

5. Основанием прямой четырехугольной призмы служит ромб с острым углом α. Как надо пересечь эту призму, чтобы в сечении получить квадрат с вершинами на боковых ребрах?

6. В прямоугольном параллелепипеде диагональ d образует с основанием угол β. Угол между диагональю основания и его стороною α. Определить боковую поверхность параллелепипеда ($\alpha = 21°35'$; $\beta = 54°24'$; $d = 17{,}89\ м$).

7. В прямом параллелепипеде основание — ромб; меньшая диагональ ромба равна d, а острый угол α. Высота параллелепипеда равна $\frac{d}{2}$. Найти его полную поверхность ($d = 25{,}87\ м$; $\alpha = 75°20'$).

8. Сторона основания правильной пятиугольной призмы — a, высота призмы равна $\frac{1}{4}d$, где d — диагональ основания. Вычислить полную поверхность призмы ($a = 23{,}79\ м$).

9. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, в котором угол между равными сторонами a равен α. Из вершины верхнего основания проведены две диагонали равных боковых

граней; угол между ними равен β. Найти боковую поверхность призмы ($a=97{,}84$ *см*; $\alpha=63°28'$ и $\beta=39°36'$).

10. В треугольной призме каждая сторона основания равна a. Одна из вершин основания имеет своей проекцией центр другого основания. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α. Определить боковую поверхность призмы.

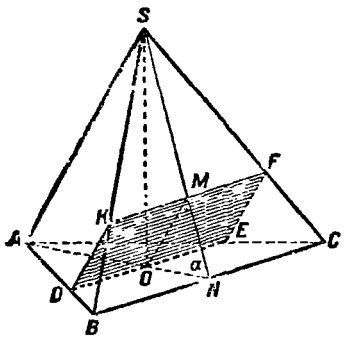
Пирамида.

11. В пирамиде, основание которой — правильный треугольник, одна из боковых граней перпендикулярна к основанию, а две другие составляют с ним угол φ. Определить углы боковых ребер с плоскостью основания ($\varphi=30°$).

12. В правильной n-угольной пирамиде плоский угол при вершине — α. Определить ее двугранные углы при основании ($n=4$; $\alpha=60°$).

13. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол α. В эту пирамиду вписан куб так, что четыре из его вершин лежат на апофемах пирамиды. Определить ребро куба.

14. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a и составляет с боковым ребром угол α. Определить площадь сечения, проведенного через боковое ребро и высоту пирамиды. Почему угол α должен быть больше 30°?



Черт. 33.

15. В правильной четырехугольной пирамиде даны апофема c и площадь диагонального сечения P. Определить в этой пирамиде угол между боковой гранью и основанием и сторону основания ($c=5$; $P=15$).

16. В правильной четырехугольной пирамиде высота относится к стороне основания как $m:n$. Через диагональ основания проведена наклонная плоскость так, что полученное сечение равно диагональному сечению. Определить угол между проведенной плоскостью и основанием пирамиды ($m:n=1:\sqrt{6}$).

17. В правильной треугольной пирамиде (черт. 33) даны сторона основания a и двугранный угол при основании α. Определить площадь сечения $DEFK$, проведенного через центр основания параллельно двум непересекающимся ребрам пирамиды SA и BC ($a=3$; $\alpha=70°$).

18. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. Через его ребро проведена внутри

пирамиды плоскость, составляющая с основанием угол β. Сторона основания равна a. Определить площадь сечения.

Применение теоремы о площади проекции к нахождению поверхности пирамиды.

19. Если все боковые грани какой-либо пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания под углом α, то:

$$S_{бок}=\frac{Q}{\cos\alpha} \text{ и } S_{полн}=\frac{2Q\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha},$$

где S — поверхность, Q — площадь основания. Доказать.

20. (Устно.) Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, катеты которого 6 *см* и 8 *см*. Все грани пирамиды наклонены к основанию под углом 60°. Найти $S_{бок}$.

21. 1) (Устно.) Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, а двугранный угол при основании равен 60°. Определить боковую поверхность.

2) Сторона основания правильной трехугольной и правильной шестиугольной пирамиды равна a, а двугранный угол при основании равен 30°. Определить боковую поверхность.

22. В треугольной пирамиде стороны основания 13 *см*, 14 *см*, 15 *см*, а двугранные углы при основании равны каждый 60°. Определить боковую поверхность пирамиды.

23. Башня заканчивается крышей, имеющей вид правильной восьмиугольной пирамиды. Боковые грани наклонены к основанию под углом 60°. Сторона основания пирамиды 1,23 *м*. Сколько квадратных метров листовой меди потребуется для покрытия крыши?

24. Площадь основания правильной пирамиды 168 $см^2$. Боковая поверхность 200 $см^2$. Найти угол наклона боковых граней к основанию.

25. В правильной четырехугольной пирамиде боковая грань наклонена к основанию под углом α. Сторона основания a. Вычислить $S_{бок}$.

26. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h. Двугранный угол при основании α. Определить полную поверхность.

27. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α; двугранные углы при основании равны φ. Найти $S_{полн}$.

28. Апофема правильной n-угольной пирамиды равна k и составляет с плоскостью основания угол α. Найти $S_{полн}$.

29. В основании пирамиды лежит равнобочная трапеция, параллельные стороны которой равны a и b, а острый угол φ. Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. Найти $S_{полн}$.

30. В основании пирамиды лежит равнобочная трапеция, диагональ которой равна l и составляет с бо́льшим основанием угол α. Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ. Определить $S_{полн}$.

Поверхность пирамиды.

31. В правильной четырехугольной пирамиде даны: сторона основания a и плоский угол при вершине α. Определить ее полную поверхность.

32. В правильной n-угольной пирамиде сторона основания a; боковое ребро составляет с плоскостью основания угол α. Определить боковую поверхность.

33. В треугольной пирамиде плоские углы при вершине α, α и β. Боковое ребро, служащее общей стороной равных углов, перпендикулярно к плоскости основания и равно a. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

34. Основанием пирамиды служит квадрат со стороною a. Из боковых граней две перпендикулярны к основанию, а две другие образуют с ним угол α. Определить $S_{бок}$ и $S_{полн}$ этой пирамиды.

35. Основанием пирамиды служит прямоугольник. Из боковых граней две перпендикулярны к основанию, а две другие образуют с ним углы α и β. Высота пирамиды равна h. Определить ее боковую поверхность.

36. Основанием пирамиды служит ромб со стороною a и острым углом α. Из боковых граней две (например заключающие угол α) перпендикулярны к основанию, а две другие наклонены к нему под углом φ. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

Усеченная пирамида.

37. В правильной n-угольной усеченной пирамиде даны: боковое ребро c и стороны оснований a и b. Определить высоту усеченной пирамиды.

38. В усеченной правильной четырехугольной пирамиде стороны большего и меньшего оснований относятся как $m:n$; боковые ребра наклонены к плоскости большего основания под углом α. В этой пирамиде проведена плоскость через сторону большего основания и противоположную ей сторону меньшего основания. Какой угол образует эта плоскость с бо́льшим основанием пирамиды?

39. В правильной n-угольной усеченной пирамиде даны высота h и стороны оснований a и b. Определить ее полную поверхность.

40. Стороны оснований правильной n-угольной усеченной пирамиды равны a и b $(a > b)$, боковое ребро составляет с основанием угол α. Определить ее полную поверхность.

41. В правильной n-угольной усеченной пирамиде отношение площадей оснований m^2, апофема k, угол между апофемой и высотой α. Определить ее боковую поверхность.

42. В усеченной правильной четырехугольной пирамиде даны: высота ее h и углы α и β, образуемые бо́льшим основанием с боковым ребром и диагональю усеченной пирамиды. Определить ее боковую поверхность ($h=25$; $\alpha=50°15'$; $\beta=35°40''$).

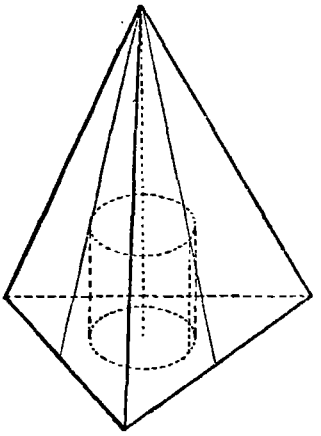
§ 20. Цилиндр, конус, усеченный конус и их поверхность.

Цилиндр.

1. В равностороннем цилиндре точка окружности верхнего основания соединена с одной из точек окружности нижнего основания. Угол между радиусами, проведенными в эти точки (имеется в виду угол между скрещивающимися прямыми), равен 30°. Определить угол между соединительной прямой и осью цилиндра.

2. В равностороннем цилиндре, радиус основания которого равен R, точка окружности верхнего основания соединена с точкой окружности нижнего основания. Соединительная прямая образует с плоскостью основания угол α. Определить кратчайшее расстояние между этой прямой и осью цилиндра.

3. К цилиндру проведена касательная прямая под углом α к плоскости основания. Определить расстояние центра нижнего основания от этой прямой, если его расстояние от точки касания равно α и радиус основания равен R.



Черт. 34.

4. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно b и образует с плоскостью основания угол α. В эту пирамиду вписан равносторонний цилиндр так, что его основание лежит в плоскости основания пирамиды. Определить высоту цилиндра (черт. 34).

Конус.

5. Радиус основания конуса равен R, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. В этом конусе проведена плоскость через его вершину под углом φ к его высоте. Определить площадь полученного сечения.

6. Между двумя параллельными плоскостями заключен конус так, что его основание находится на одной из них, а вершина на другой. Угол между осью конуса и образующей равен α. Через середину оси проведена прямая, составляющая с нею угол β и пересекающая

боковую поверхность конуса в двух точках. Отрезок этой прямой между параллельными плоскостями равен a. Определить отрезок, заключенный внутри конуса.

7. Определить ребро куба, вписанного в конус, образующая которого равна l и наклонена к плоскости основания под углом α.

8. В конусе даны радиус основания R и угол α между образующей и плоскостью основания. В этот конус вписана прямая треугольная призма с равными ребрами так, что ее основание лежит в плоскости основания конуса. Определить длину ее ребер.

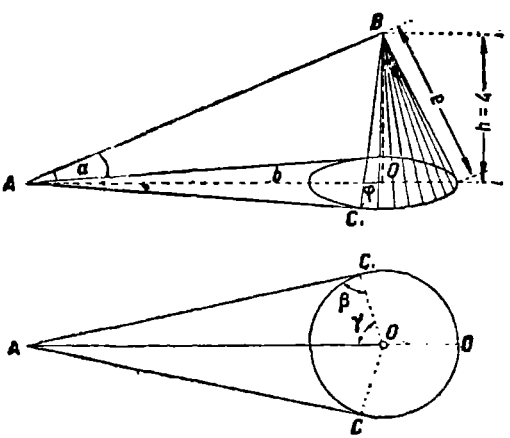
9. Образующая конуса a наклонена к плоскости его основания под углом α. Определить полную поверхность конуса.

10. Боковая поверхность конуса втрое больше площади основания. Найти угол между образующей и основанием.

11. Определить угол между образующей и плоскостью основания в конусе, у которого площадь осевого сечения в 4 раза менее полной поверхности.

12. Определить полную поверхность конуса, если угол между образующей и плоскостью основания равен α, а площадь осевого сечения Q.

13. Через две образующие конуса, составляющие между собою угол φ, проведена плоскость, наклоненная к плоскости основания конуса под углом α. Площадь сечения равна S. Определить высоту конуса ($\varphi = 52°16'$; $\alpha = 33°10'13''$; $S = 617{,}5\ см^2$).

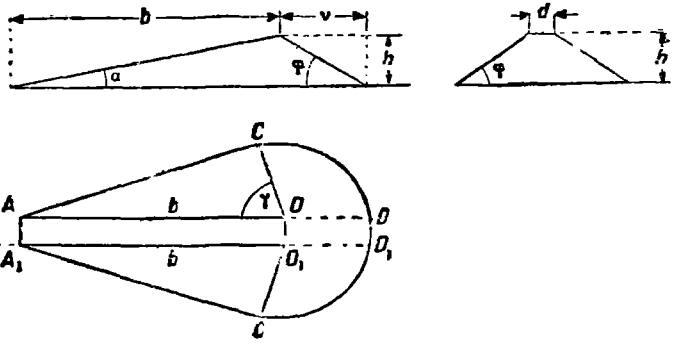


Черт. 35.

14. Радиус основания конуса r; образующая наклонена к плоскости основания под углом α. Определить боковую поверхность конуса и площадь сечения, проходящего через вершину конуса под углом δ к его высоте ($r = 2{,}3\ м$; $\alpha = 42°27'$; $\delta = 36°21'18''$).

15. Земляная насыпь имеет форму, данную на чертеже 35. Дано: $\frac{h}{b} = \frac{1}{n} = 0{,}05$; $\frac{h}{r} = \frac{1}{m} = \frac{2}{3}$; $h = 4\ м$. Вычислить: 1) α и φ; 2) γ; 3) b; 4) r; 5) площадь плана; 6) поверхность насыпи.

16. Железнодорожный путь, подъем которого $1:n=\frac{1}{20}$, имеет форму прямоугольника шириною в $d=2$ *м*. Для устройства упора (тупик) конец его необходимо укрепить насыпью, согласно чертежу 36, на котором даны продольный и поперечный разрезы и план укрепления. Все числовые данные сохранены из задачи 15. Чем отличается поверхность этой насыпи от поверхности в задаче 15? Вычислить всю поверхность насыпи.



Черт. 36.

17. Боковая поверхность конуса равна S; образующая равна a. Найти угол при вершине осевого сечения ($S=81{,}31$ *м*^{2}; $a=10$ *м*).

18. Высота конуса H, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. Полная поверхность этого конуса разделена пополам плоскостью, перпендикулярной к высоте. Определить расстояние секущей плоскости от вершины конуса.

19. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен α; определить центральный угол в развертке его боковой поверхности. (Примеры: 1) равносторонний конус; 2) $\alpha=70°24'$.)

Усеченный конус.

20. Образующая усеченного конуса наклонена к его основанию, имеющему радиус R, под углом α; радиус другого основания равен r. Определить боковую поверхность усеченного конуса.

21. Высота усеченного конуса есть средняя пропорциональная между радиусами его оснований; сумма же радиусов оснований равна S. Угол, составляемый образующей усеченного конуса с плоскостью его основания, равен α. Определить боковую поверхность этого усеченного конуса.

22. Через две образующие усеченного конуса, составляющие между собою угол β, проведена плоскость, пересекающая основания конуса по хордам, соответственно равным m и n ($m>n$).

Каждая хорда стягивает дугу α. Найти боковую поверхность усеченного конуса.

23. В усеченном конусе, радиусы оснований которого R и r, проведена плоскость под углом β к основанию. Эта плоскость отсекает от окружности каждого основания дугу δ. Определить площадь сечения.

24. В усеченном конусе высота равна h; образующая составляет с плоскостью нижнего основания $\angle\ \alpha$ и перпендикулярна к линии, соединяющей верхний конец ее с нижним противоположной образующей. Определить боковую поверхность усеченного конуса.

25. Площади нижнего и верхнего оснований усеченного конуса и его боковая поверхность относятся как $m:n:p$. Определить угол между образующей и плоскостью нижнего основания.

26. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая составляет с плоскостью нижнего основания угол α и равна l. Определить боковую поверхность и полную поверхность этого усеченного конуса ($l=12$; $\alpha=70°20'$).

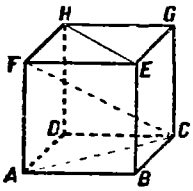
27. Образующая усеченного конуса составляет с плоскостью его основания угол α; площади оснований Q и q. Определить $S_{бок}$.

§ 21. Вычисление объемов.

Параллелепипед.

1. Диагональ l прямоугольного параллелепипеда наклонена к плоскости основания под углом φ; острый угол между диагоналями основания β. Определить объем.

2. В прямоугольном параллелепипеде диагональ основания $d=7{,}5$ *дм*, угол между диагоналями основания $\alpha=43°27'$, а угол, составляемый диагональной плоскостью, проведенною через бо́льшую из сторон основания с плоскостью последнего, $\beta=57°33'$. Определить объем параллелепипеда.



Черт. 37.

3. В основании прямого параллелепипеда острый угол равен α, а стороны a и b; меньшая диагональ параллелепипеда равна большей диагонали основания. Определить объем параллелепипеда.

4. Прямой параллелепипед (черт. 37) имеет в основании параллелограм, в котором диагональ $AC=d$, сторона $CB=\frac{1}{4}AC$ и $\angle ABC=\alpha$. Диагональ параллелепипеда FC образует с плоскостью основания угол φ. Найти объем параллелепипеда, а также угол между диагоналями оснований AC и EH ($d=14.278$ *дм*; $\alpha=106°6'7''$; $\varphi=57°46'51''$).

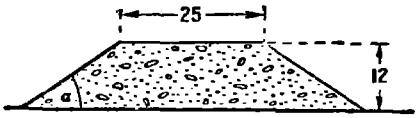
5. В параллелепипеде длины трех ребер, выходящих из общей вершины, a, b и c; ребра a и b взаимно перпендикулярны, а ребро c образует с каждым из них угол α. Определить объем параллелепипеда и угол между ребром c и плоскостью прямоугольника ($\alpha = 120°$).

Призма.

6. Диагональ правильной четырехугольной призмы образует с боковой гранью угол α; сторона основания a. Определить объем призмы.

7. Через диагональ нижнего и вершину верхнего основания правильной четырехугольной призмы проведена плоскость, пересекающая две смежные боковые грани призмы по прямым, между которыми угол $\alpha = 58°48'36''$. Сторона основания призмы $a = 6{,}4$ *см*. Определить объем призмы.

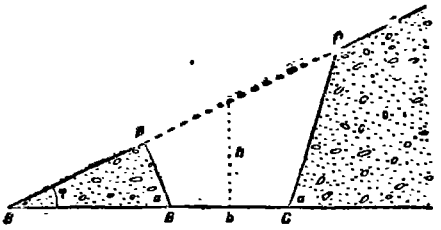
8. В правильной треугольной призме две вершины верхнего основания соединены с серединами противоположных им сторон нижнего основания. Угол между полученными прямыми, обращенный отверстием к плоскости основания, равен α; сторона основания равна a. Определить объем призмы.



Черт. 38.

9. Разрез железнодорожной насыпи дан на чертеже 38. Угол α определяется равенством $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$. Сколько куб. метров земли приходится на 1 погонный метр насыпи? Размеры на чертеже даны в метрах.

10. Основанием прямой призмы служит треугольник ABC, у которого сторона $AC = 38{,}03$ *дм*, сторона $BC = 34{,}84$ *дм*, угол $ACB = 58°22'$. Боковое ребро призмы равно высоте h_c треугольника ABC. Определить 1) $S_{полн}$; 2) объем призмы.



Черт. 39.

11. Высота h прямой призмы равна 20 *дм*; основанием служит прямоугольная трапеция с острым углом $\alpha = 45°42'$, описанная около круга радиуса $r = 6.15$ *дм*. Определить объем призмы.

12. Требуется проложить выемку для железной дороги на участке земли, подымающемся под углом $\varphi = 18°30{,}5'$ (черт. 39). Бока выемки имеют угол откоса $\alpha = 28°\ 10'$, ширина выемки внизу $b = 14{,}2$ *м*, глубина в середине $h = 9{,}2$ *м*. Сколько куб. метров земли приходится на 1 погонный метр выемки?

13. Основанием призмы служит $\triangle ABC$, в котором $BC = a$ и $AB = AC$. Ребро AA_1 равно b и перпендикулярно к BC; двугранный угол при ребре AA_1 равен α. Определить объем этой призмы.

Пирамида.

14. Определить объем правильной n-угольной пирамиды, боковое ребро которой b наклонено к плоскости ее основания под углом β. ($n = 8$; $b = 3{,}5$ *м*; $\beta = 78°39'$.)

15. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, в которой боковое ребро равно b, а плоский угол при вершине равен α.

16. Определить объем пирамиды, если ее высота равна h, боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом φ и в основании треугольник с углами α и β.

17. В треугольной пирамиде две боковые грани — равнобедренные прямоугольные треугольники, гипотенузы которых равны b и образуют между собой угол α. Определить объем этой пирамиды.

18. Основанием пирамиды служит трапеция, в которой каждая из боковых сторон и меньшая из параллельных имеет длину a, а острые углы равны α; боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания угол φ. Определить объем этой пирамиды.

19. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, в которой параллельные стороны a и b ($a > b$), а неравные отрезки диагоналей образуют угол α; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания; двугранные углы, прилежащие к параллельным сторонам основания, относятся как 1:2. Определить объем пирамиды.

20. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограм $ABCD$. Ребра SB и SD перпендикулярны к сторонам основания BC и AD и образуют с плоскостью основания угол φ. Определить объем пирамиды, если острый угол параллелограма равен α, а площадь равна P.

21. В грани ABC пирамиды $SABC$ угол A равен 72°36'45" и угол B равен 47°23'15". Объем пирамиды равен 317,058 куб. сантиметров. Проведена плоскость через ребро SC и биссектрису угла C в треугольнике ABC. На какие части разделился этой плоскостью данный объем?

22. Через ребро правильного тетраэдра проведена плоскость, делящая его объем в отношении 3:5. На какие части она делит двугранный угол?

Усеченная пирамида.

23. Яма для пруда имеет форму правильной усеченной четырехугольной пирамиды. Стороны оснований 14 *м* и 10 *м*. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 38°. Сколько воды может вместить эта яма?

24. В усеченной правильной четырехугольной пирамиде даны стороны a и b большего и меньшего оснований и острый угол α в боковой грани. Определить объем ($a=25{,}704$; $b=15{,}23$; $\alpha=65°12'$).

25. Стороны оснований правильной восьмиугольной усеченной пирамиды 90 *см* и 30 *см*; боковое ребро равно 2 *м*. Найти объем.

26. В правильной n-угольной усеченной пирамиде стороны оснований a и b. Боковое ребро составляет с плоскостью оснований угол α. Найти объем.

27. По боковому ребру l и сторонам оснований a и b определить объем V и полную поверхность $S_{полн}$ правильной n-угольной усеченной пирамиды.

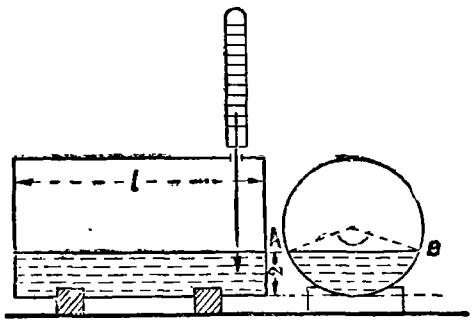
28. Определить объем V правильной четырехугольной пирамиды, в которой даны сторона основания a и двугранный угол между боковыми гранями α.

Цилиндр.

29. Боковая поверхность цилиндра в развертке представляется прямоугольником, в котором диагональ d составляет угол α с основанием. Определить объем цилиндра.

30. В круге, служащем основанием цилиндра, проведена хорда, длина которой a. Соответствующий ей центральный угол равен α. Высота цилиндра h. Найти его объем ($a=4{,}8$ *дм*; $\alpha=26°\,32'\,46''$; $h=23$ *дм*).

31. В основание равностороннего цилиндра (т. е. цилиндра, у которого диаметр основания равен образующей) вписан правильный n-угольник, сторона которого a. Определить: 1) боковую поверхность и 2) объем этого цилиндра.



Черт. 40.

32. Горизонтально установленный цилиндрический бак наполнен жидкостью (черт. 40). Дуга AB содержит 135°. Диаметр (внутренний) бака равен 1,7 *м*. Длина (внутренняя) бака равна 3,5 *м*. Определить количество жидкости.

33. Найти объем цилиндрической трубки, высота которой H, зная, что если через образующую внешней ее поверхности провести две плоскости, касательные к внутренней поверхности, то угол между ними α, а хорда, соединяющая точки касания этих плоскостей с внутренней окружностью основания трубки, — b.

34. В основании цилиндра проведена хорда, равная стороне правильного n-угольника, вписанного в это основание. Если соединить концы этой хорды с центром другого основания, то получится треугольник, площадь которого равна Q, а угол при вершине α. Вычислить боковую поверхность S и объем данного цилиндра V.

Конус.

35. Угол откоса для мелкого песка $\varphi = 31°$. Куча песка имеет вид конуса, длина окружности основания которого 11 *м*. Удельный вес песка 1,6. Узнать вес этой кучи.

36. Угол, составляемый образующей конуса с его осью, $\alpha = 18°45'50''$; длина образующей $l = 36{,}17$ *дм*. Определить полную поверхность S и объем конуса V.

37. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом φ, а высота h. Определить: 1) полную поверхность и 2) объем конуса.

38. Образующая конуса наклонена к плоскости его основания под углом α; радиус основания R. Определить полную поверхность S и объем V конуса.

39. Осевое сечение конуса представляет треугольник, угол при вершине которого α. Радиус круга, описанного около этого треугольника, R. Определить объем конуса.

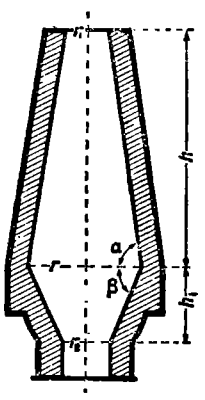
40. Хорда a в основании конуса стягивает дугу α; угол между высотой конуса и образующей β. Определить объем конуса.

41. Разность между образующей и высотой конуса $d = 2{,}5$ *дм*, а угол между ними $\alpha = 42°38'16''$. Определить объем конуса.

42. Круг, радиус которого $R = 5{,}38$ *дм*, служит общим основанием двух конусов, построенных по одну сторону общего их основания. Образующая одного конуса составляет с плоскостью основания угол $\alpha = 74°28'$, образующая другого составляет с тою же плоскостью угол $\beta = 60°12'$. Определить объем, заключенный между боковыми поверхностями этих конусов.

Усеченный конус.

43. Образующая усеченного конуса наклонена к его основанию, имеющему радиус R, под углом α; радиус другого основания равен r. Найти объем усеченного конуса.



Черт. 41.

44. В усеченном конусе, у которого отношение площадей оснований равно 4, образующая равна l и наклонена к плоскости основания под углом φ. Определить объем конуса.

45. На чертеже 41 изображен продольный разрез доменной печи. Внутренность доменной печи состоит из двух усеченных конусов.

Верхнее и нижнее отверстия имеют радиусы r_1 и r_2. Углы наклона образующих к основанию α и β. Общий объем V. Определить радиус общего основания конусов r, а также их высоты h и h_1 ($2r_1 = 4.2$ *м*; $2r_2 = 4{,}9$ *м*; $\alpha = 86°$; $\beta = 76°$; $V = 572{,}6$ *м*^{3}).

46. В усеченном конусе помещается полный конус, имеющий с ним общее меньшее основание, общую высоту и образующие, соответственно параллельные его образующим. Определить объем усеченного конуса, зная, что бо́льший угол между продолжениями его образующих, из которых каждая $a = 24{,}9$ *дм*, есть $\alpha = 65°49'48''$.

47. В усеченном конусе диагональ осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая составляет с плоскостью большего основания угол α и равна l. Определить объем этого усеченного конуса ($l = 12$; $\alpha = 70°20'$).

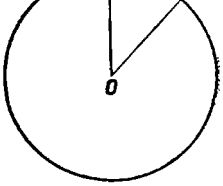
§ 22. Шар и его части.

Шар.

1. Радиус земного шара равен 6370 *км*. Москва находится на 56° северной широты. Найти радиус этого круга широты.

2. Радиус земного шара равен 6370 *км*. Найти длину тропика (широта 23° 27′) и полярного круга (широта 66°33′).

3. Наблюдатель, находясь на вершине горы в точке A (черт. 42), измерил угол $DAC = \alpha$, составленный лучом зрения AC, идущим к горизонту, и вертикальной линией AD. Зная радиус земли r, определить высоту горы $AD = x$.



Черт. 42.

4. В шар, объем которого $V = 53{,}377$ *дм*^{3}, вписан конус. Угол, составленный двумя образующими конуса, проведенными к концам одного диаметра основания, $\alpha = 42° 18'$. Определить объем конуса.

5. Образующая конуса составляет с его осью $\angle \alpha = 35° 18'20''$. Определить отношение объема этого конуса к объему описанного около него шара.

6. Сторона основания правильной n-угольной пирамиды равна a; двугранный угол при основании — φ. Определить радиус шара, вписанного в пирамиду.

7. Определить радиус шара, описанного около правильной n-угольной пирамиды, если сторона основания равна a, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α ($n = 8$; $a = 3{,}5$ *м*, $\alpha = 58° 37'42''$).

8. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α; двугранные углы при основании равны φ. Определить радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

9. В конусе даны длина C окружности основания и угол α между образующей и основанием. Определить длину линии, по которой взаимно касаются боковая поверхность конуса и поверхность вписанного в него шара.

10. В коническую поверхность вписан шар; линией касания поверхность этого шара делится в отношении $m:n$. Определить в конической поверхности наклон образующей к оси ($m:n=1:3$).

11. Определить в конусе угол между образующей и плоскостью основания, если площадь основания, поверхность вписанного шара и боковая поверхность конуса составляют арифметическую прогрессию.

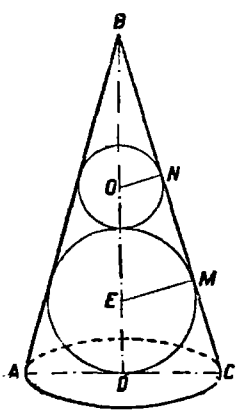
12. Определить угол между образующей и плоскостью основания в конусе, который в m раз более вписанного в него шара.

(Найти наименьшее значение m; вычислить угол, если $m=2\frac{1}{4}$.)

13. Поперечное сечение, делящее объем конуса пополам, проходит через центр описанного шара. Найти угол между образующей и плоскостью основания.

14. Определить угол при вершине в осевом сечении конуса, описанного около четырех равных шаров, расположенных так, что каждый касается трех других.

15. Около шара описан усеченный конус, боковая поверхность которого относится к поверхности шара как $m:n$. Определить угол между образующей и бо́льшим основанием ($m:n=2:1$).



Черт. 43.

16. Определить радиус шара, описанного около усеченного конуса, в котором радиусы оснований R и r, а образующая наклонена к плоскости нижнего основания под углом α.

17. В усеченный конус, радиусы оснований которого r_1 и r_2 ($r_1>r_2$), вписан шар. Определить: 1) поверхность шара и 2) угол наклона образующей конуса к плоскости его основания.

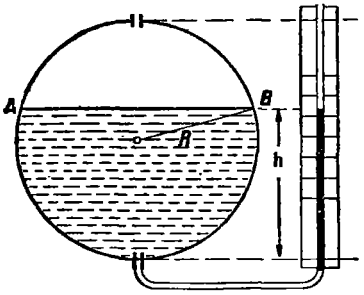
18. В конусе помещены два шара так, что касаются друг друга и поверхности конуса (черт. 43). Отношение радиусов OM и EN шаров равно $m:n$. Определить величину угла ABC при вершине сечения, проведенного через ось конуса.

19. Радиус основания конуса равен R, образующая наклонена к плоскости основания под углом α. В этот конус вписан ряд шаров так, что первый шар касается боковой поверхности конуса и его основания, а каждый следующий — боковой поверхности конуса и

предыдущего шара. Найти предел, к которому стремится сумма объемов этих шаров, если число их бесконечно увеличивается.

Части шара.

20. Бак, имеющий вид шара радиуса R, наполнен до некоторой высоты h жидкостью, удельный вес которой равен d. Дуга AB (черт. 44) содержит φ°. Радиус (внутренний) бака равен R. Найти вес жидкости.



Черт. 44.

21. Резервуар для газа состоит из цилиндра, закрытого сверху шаровым сегментом. Внутренние размеры цилиндра: диаметр — 24 *м*, высота — 6 *м*. Дуга в осевом сечении шарового сегмента, покрывающего цилиндр, содержит 73° 44′. Найти емкость резервуара.

22. В некотором сферическом слое, имеющем равные основания, боковая поверхность равновелика сумме оснований. Определить величину дуг в осевом сечении этого слоя.

23. Определить кривую поверхность сферического сегмента, если в его осевом сечении дуга равна α, а длина хорды равна a.

24. Дуга в осевом сечении сферического сегмента $\alpha = 65^\circ 28'36''$; радиус шара, от которого отделен сегмент, $R = 24$ *дм*. Определить кривую поверхность сегмента.

25. Дуга сегмента в осевом сечении сферического сектора α, а хорда, ее стягивающая, b. Определить объем сектора.

26. Объем шара равен V. Определить объем его сектора, у которого центральный угол в осевом сечении равен α.

27. Определить полную поверхность сферического сектора с углом α при вершине и радиусом R.

28. Объем тела, производимого вращением кругового сектора OAB около радиуса OA, равен $\frac{1}{4}$ объема шара того же радиуса. Определить угол между радиусами OA и OB.

29. Круговой сектор, радиус которого равен R, а центральный угол α вращается около диаметра, перпендикулярного к среднему радиусу этого сектора. Определить объем тела вращения.

30. Круговой сектор, дуга которого равна α (менее 180°), вращается около диаметра, проходящего вне его; объем полученного тела относится к объему шара того же радиуса как $m : n$. Определить меньший из углов, образуемых диаметром с боковыми радиусами сектора ($\alpha = 90^\circ$; $m : n = 1\sqrt{3} : 1\sqrt{8}$).

31. Радиус сферического сектора R, наибольший угол между радиусами α. Определить объем и поверхность шара, вписанного в сектор.

§ 23. Тела вращения.

Тела вращения, приводимые к цилиндрам и конусам.

1. Треугольник, одна из сторон которого $c = 6$ *м*, а прилежащие к ней углы $\alpha = 97°12'20''$ и $\beta = 13°18'$, вращается вокруг стороны c, как вокруг оси. Вычислить объем и поверхность тела, происходящего от этого вращения.

2. Площадь равнобедренного треугольника $S = 50$ *дм*^{2}, а угол при вершине $\beta = 100°26'24''$. Вычислить полную поверхность тела, которое произошло от вращения этого треугольника около прямой, перпендикулярной к основанию и проведенной через один из его концов.

3. Определить объем тела, образованного вращением треугольника ABC около оси, проходящей через вершину A и параллельной стороне BC, зная, что $BC = a = 23{,}543$ *дм*, проекция стороны AB на ось вращения $b = 7{,}3345$ *дм*, а угол между AB и b равен $\alpha = 18°36'47''$.

4. Правильный треугольник, сторона которого a, вращается около оси, проходящей вне его через конец его стороны под острым углом α к этой стороне. Определить поверхность тела вращения.

5. Равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна b, а угол при вершине α, вращается около боковой стороны. Определить объем и поверхность тела вращения ($\alpha = 120°$).

6. Ромб со стороной a и острым углом α вращается около оси, проходящей через вершину острого угла перпендикулярно к его стороне. Определить поверхность и объем тела вращения.

7. В треугольнике даны сторона a и углы B и C. Определить поверхность и объем тела, полученного от вращения треугольника около данной стороны.

8. В треугольнике даны стороны b и c и угол между ними α; этот треугольник вращается около оси, которая проходит вне его через вершину угла α и равно наклонена к сторонам b и c. Определить объем тел вращения.

9. В треугольнике даны основание a и прилежащие углы α и $90° + \alpha$. Определить объем тела, полученного от вращения этого треугольника около его высоты.

10. На полуокружности радиуса R от конца B диаметра AB отложена дуга BC, равная α (менее 90°), и через точку C проведена

касательная до встречи в точке D с продолжением диаметра AB; кроме того, точка C соединена с A. Определить объем тела, которое образуется вращением треугольника ACD около стороны AD.

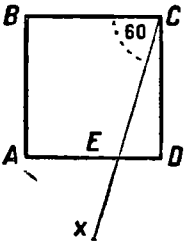
11. Углы треугольника ABC даны. Определить, как относятся между собою объемы V_a, V_b и V_c тел, полученных от вращения этого треугольника последовательно около сторон a, b и c.

12. В тупоугольном треугольнике даны бо́льшая сторона b и прилежащие углы α и γ. Этот треугольник вращается около оси, проходящей через центр описанного круга, параллельно стороне b. Определить объем тела вращения ($b=10$; $\alpha=50°$; $\gamma=23°17'$).

13. Площадь прямоугольного треугольника равна S; один из острых углов равен α. Через вершину этого острого угла проведена прямая, перпендикулярная к гипотенузе и лежащая в плоскости треугольника. Определить объем V тела, производимого вращением треугольника около упомянутой оси.

14. Определить объем и поверхность тела, происшедшего от вращения прямоугольника около оси, проходящей через одну его вершину перпендикулярно диагонали d, которая образует со стороною угол α ($d=34{,}06$ *м*; $\alpha=56°14'18''$).

15. Через вершину C квадрата $ABCD$ (черт. 45), сторона которого равна a, проведена прямая Cx, образующая со стороною BC угол $BCx=60°$ и пересекающая сторону AD в точке E. Определить объем тела, образуемого вращением четырехугольника $EABC$ около прямой Cx.



Черт. 45.

16. Периметр прямоугольного треугольника $2p=27{,}425$ *дм*, один из углов $\alpha=41°15'32''$. Определить объем тела, полученного при вращении треугольника около гипотенузы.

17. В прямоугольной трапеции, описанной около круга радиуса r, острый угол α. Определить боковую поверхность тела, полученного от вращения этой трапеции около меньшей из непараллельных сторон.

18. Два треугольника: равнобедренный, с углом при вершине $\alpha=54°17'36''$, и равносторонний лежат в одной плоскости и имеют общее основание $b=25{,}345$ *см*. Определить объем и поверхность тела, полученного от вращения рассматриваемой системы треугольников около оси, проходящей через одну из общих вершин этих треугольников параллельно высоте равнобедренного треугольника.

19. Диагональ параллелограма составляет угол β с меньшей его стороной; расстояние между бо́льшими сторонами параллелограма равно h. Определить объем тела, образованного вращением параллелограма около оси, проходящей через вершину его острого угла α параллельно упомянутой диагонали.

20. Правильный многоугольник с четным числом (n) сторон вращается около прямой, соединяющей две противоположные вершины. Выразить поверхность и объем тела вращения: 1) по радиусу r вписанного круга, 2) по радиусу R описанного круга и 3 по стороне a многоугольника.

21. Правильный многоугольник с четным числом (n) сторон вращается около прямой, соединяющей середины двух противоположных сторон. Выразить поверхность и объем тела вращения: 1) по радиусу r вписанного круга, 2) по радиусу R описанного круга и 3) по стороне a многоугольника.

22. Правильный многоугольник с нечетным числом (n) сторон вращается около прямой, соединяющей середину стороны с противоположной вершиной. Выразить поверхность и объем тела вращения: 1) по радиусу r вписанного круга, 2) по радиусу R описанного круга и 3) по стороне a многоугольника.

Тела вращения, содержащие в себе части шара.

23. Определить объем V и полную поверхность S тела, происшедшего от вращения кругового сегмента радиуса R около диаметра, проходящего через конец его дуги α.

24. Определить объем тела, образованного вращением кругового сектора с центральным углом α около диаметра $2r$ круга, от которого отделен сектор, составляющего угол β с средним радиусом сектора.

25. В круге радиуса r взят сегмент ACB с дугою $AB=\alpha$. Хорда AB составляет с диаметром DE угол β. Определить объем тела, образованного вращением сегмента ACB около диаметра DE.

26. Круговой сектор, содержащий угол α, вращается около диаметра, перпендикулярного к среднему радиусу этого сектора. Площадь сектора равна Q. Определить поверхность тела вращения ($\alpha=70°36'$; $Q=211{,}8$).

27. От конца A радиуса OA отложена дуга AB, равная α (менее 90°); из точки B проведена параллель к AO до встречи в точке C с радиусом, перпендикулярным к OA; на радиусе OA отложена часть AD, равная BC, и точка D соединена с C. Фигура, ограниченная прямыми BC, CD и DA и дугой AB, вращается около оси OC. Определить объем тела вращения, зная, что радиус дуги равен R.

28. Из конца диаметра шара проведена хорда так, что поверхность, образуемая вращением ее около диаметра, делит объем шара пополам. Определить угол α между хордой и диаметром.

29. Круговой сегмент, содержащий дугу α (менее 90°), вращается около диаметра, перпендикулярного к одному из крайних радиусов дуги. Определить поверхность и объем тела вращения, если радиус дуги равен R.

Таблица тригонометрических функций

°	sin	tg	ctg	cos	°
0	0,000	0,000	∞	1,000	90
1	0,017	0,017	57,290	1,000	89
2	0,035	0,035	28,636	0,999	88
3	0,052	0,052	19,081	0,999	87
4	0,070	0,070	14,301	0,998	86
5	0,087	0,087	11,430	0,996	85
6	0,105	0,105	9,514	0,995	84
7	0,122	0,123	8,144	0,993	83
8	0,139	0,141	7,115	0,990	82
9	0,156	0,158	6,314	0,988	81
10	0,174	0,176	5,671	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,965	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,325	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,904	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
°	cos	ctg	tg	sin	°

ОТВЕТЫ.

§ 1.

1. 120°; 1440°. **2.** 1080°; 10800°. **3.** 5°; 150°; 720°; 1500°. **5.** 360°.
6. 1) $120° + 360°n$; 2) $-60° + 360°n$, или $300° + 360°n$;
1) 120°, 480°, 840°,...

7. 1) 1,57 *см*; 2) $\frac{\pi Ra}{180}$. **8.** 1) a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{\pi}{3}$; d) $\frac{3}{4}\pi$; e) $\frac{\pi}{12}$;
f) $\frac{\pi}{8}$; g) $\frac{\pi}{5}$; h) $\frac{5}{12}\pi$; i) $\frac{3}{5}\pi$; k) $\frac{5}{6}\pi$; l) $\frac{7}{8}\pi$; m) $0{,}9\pi$.

2) a) 0,8901; b) 0,4712; c) 1,3352; d) 0,2182; e) 0,5009; f) 1,2802;
g) 2,0420; h) 3,7737. 3) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2}{5}\pi$; $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{\pi(n-2)}{n}$.

9. 1) 85°57′; 114°35′; 42°58″; 30°; 120°; 270°; 22°30′; 135°; 216°.
2) 40°; 75°; 13°30′; 57°42′; 218°; 27°30′; 74°29′; 45°50′.
10. 1) $10\pi = 31{,}4$; 2) 6,28 *м/сек.*; 3) 37,7 *м/сек.* **11.** 200.

§ 2.

1. В первой; нет. **4.** От 0 до 2. **5.** Лишь 1-е. **6.** Нет. **7.** 0. **8.** *c*.
9. $a - b + c$. **10.** $(a-b)^2$. **11.** $a^2 - b^2$. **12.** 0. **13.** $\pm\infty$.
14. 1) 0,6; 2) $-0{,}5$; 3) $-0{,}7$; 4) 0,9; 5) 1,7; 6) $-2{,}7$.
15. 1, 3, 7 — отрицательны; 2, 4, 5, 6, 8 — положительны.
16. 1) $\cos 20°$; 2) $\sin 50°$; 3) $\operatorname{ctg} 40°$; 4) $\operatorname{tg} 50°$.
21. 1) 15°; 135°; 255°; 2) 300°; 3) 50°; 110°; 170°; 230°; 290°; 350°;
1) 120°; 5) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5}{6}\pi$; $1\frac{1}{6}\pi$; $1\frac{5}{6}\pi$; 6) $\frac{\pi}{12}$; $1\frac{5}{12}\pi$; 7) 45°; 135°; 8) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2}{3}\pi$.

22. 1) $69° + 180°n$; 2) $-39° + 180°n$; 3) $\pm 26° + 360°n$; 4) $\pm 132° + 360°n$,
5) $15° + 360°n$ и $165° + 360°n$ или $(-1)^n \cdot 15° + 180°n$;
6) $45° + 360°n$ и $135° + 360°n$ или $(-1)^n \cdot 45° + 180°n$.

23. $\sin x = -1$. **24.** $\cos x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. **25.** $\sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.
26. $\sin x = 0$. **27.** $\operatorname{tg} x = 0; 2$. **28.** $\sec x = 2$.
29. $\operatorname{ctg} x = 0$. **30.** $\operatorname{tg} x = \pm\infty$. **31.** Невозможное.
32. $\operatorname{arc\,tg} m + 180°n$; m равно любому числу; 2) $\pm \arccos m + 360°n$;
$-1 \leqq m \leqq 1$; 3) $(-1)^n \arcsin m + 180°n$; $-1 \leqq m \leqq 1$.

33. 1) $\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2}$; 2) $-45° = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3) $\frac{\pi}{4} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $90° = \arccos 0$; 5) $-\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}(-1)$; 6) $0 = \operatorname{arc\,tg} 0$;
7) $30° = \operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3}$; 8) $0 = \operatorname{arc\,ctg}\infty$.
34. 1) 47° или 0,8203; 2) 66°30′ или 1,1606; 3) 74°47′ или 1,3052;
4) 62°54′ или 1,0978.

35. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $3\sin a$; 5) $a\cos\frac{b}{c}$; 6) $\frac{1}{\operatorname{tg} a}$.

§ 3

№ задачи	1	2	3	4
$\sin\alpha$	$(\sin\alpha)$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$(\cos\alpha)$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$(\operatorname{tg}\alpha)$	$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\pm\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	$(\operatorname{ctg}\alpha)$
$\sec\alpha$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\cos\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{cosec}\alpha$	$\dfrac{1}{\sin\alpha}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$
№ задачи	5	6	7	8
$\sin\alpha$	(0,8)	(— 0,3)	$\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$	$\pm\dfrac{4}{5}$
$\cos\alpha$	$\pm 0{,}6$	$\pm\dfrac{\sqrt{91}}{10}$	$\left(\dfrac{2}{3}\right)$	$\left(-\dfrac{3}{5}\right)$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\dfrac{4}{3}$	$\pm\dfrac{3}{\sqrt{91}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$	$\pm\dfrac{4}{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm 0{,}75$	$\pm\dfrac{\sqrt{91}}{3}$	$\pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$	$\pm\dfrac{3}{4}$
$\sec\alpha$	$\pm\dfrac{5}{3}$	$\pm\dfrac{10}{\sqrt{91}}$	$\dfrac{3}{2}$	$-\dfrac{5}{3}$
$\operatorname{cosec}\alpha$	1,25	$-\dfrac{10}{3}$	$\pm\dfrac{3}{\sqrt{5}}$	$\pm\dfrac{5}{4}$

№ задачи	9	10	11	12
sin α	$\pm\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\pm\frac{9}{41}$	$\pm\frac{15}{17}$	$\pm\sqrt{0{,}1}$
cos α	$\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\pm\frac{40}{41}$	$\pm\frac{8}{17}$	$\pm\sqrt{0{,}9}$
tg α	$(\sqrt{5})$	$\left(-\frac{9}{40}\right)$	$\frac{15}{8}$	$-\frac{1}{3}$
ctg α	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-\frac{40}{9}$	$\left(\frac{8}{15}\right)$	(-3)
sec α	$\pm\sqrt{6}$	$\pm\frac{41}{40}$	$\pm\frac{17}{8}$	$\pm\frac{\sqrt{10}}{3}$
cosec α	$\pm\sqrt{\frac{6}{5}}$	$\pm\frac{41}{9}$	$\pm\frac{17}{15}$	$\pm\sqrt{10}$
№ задачи	**13**	**14**	**15**	**16**
sin α	$\pm\frac{\sqrt{8}}{3}$	$\pm\frac{21}{29}$	$\frac{5}{13}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
cos α	$\frac{1}{3}$	$-\frac{20}{29}$	$\pm\frac{12}{13}$	$\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$
tg α	$\pm\sqrt{8}$	$\pm\frac{21}{20}$	$\pm\frac{5}{12}$	$\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$
ctg α	$\pm\frac{1}{\sqrt{8}}$	$\pm\frac{20}{21}$	$\pm 2{,}4$	$\pm\sqrt{2}$
sec α	(3)	$\left(-1\frac{9}{20}\right)$	$\pm\frac{13}{12}$	$\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$
cosec α	$\pm\frac{3}{\sqrt{8}}$	$\pm\frac{29}{21}$	(2,6)	$(-\sqrt{3})$

№ задачи	17	18	19	20
$\sin\alpha$	$\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$	$\pm\frac{b}{a}$	$\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{99}{101}$
$\cos\alpha$	$\pm\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$	$\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$	$\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{20}{101}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$	$\pm\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$	$\left(\frac{a}{b}\right)$	$\left(4\frac{19}{20}\right)$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}$	$\pm\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{20}{99}$
$\sec\alpha$	$\pm\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}$	$\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$	$\frac{101}{20}$
$\operatorname{cosec}\alpha$	$\frac{a+b}{a-b}$	$\pm\frac{a}{b}$	$\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$	$\frac{101}{99}$
№ задачи	21	22	23	
$\sin\alpha$	0,96	$\left(-\frac{12}{13}\right)$	$-\frac{20}{29}$	
$\cos\alpha$	(−0,28)	$-\frac{5}{13}$	$\frac{21}{29}$	
$\operatorname{tg}\alpha$	$-\frac{24}{7}$	$\frac{12}{5}$	$-\frac{20}{21}$	
$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\frac{7}{24}$	$\frac{5}{12}$	(−1,05)	
$\sec\alpha$	$-\frac{25}{7}$	$-\frac{13}{5}$	$\frac{29}{21}$	
$\operatorname{cosec}\alpha$	$\frac{25}{24}$	$-\frac{13}{12}$	−1,45	

24. $\cos^2\alpha$ **25.** $\sin^2\alpha$. **26.** $1-\cos\alpha$.
27. $-(1+\sin\alpha)$. **28.** $\sec^2\alpha$. **29.** $\cos^2\alpha$.
30. a) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$; *b*) $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta$. **31.** a) $\operatorname{ctg}^2\alpha$; *b*) $\operatorname{tg}^2\alpha$.
32. $\cos\alpha$. **33.** $\sin\alpha$. **34.** $\sec\alpha$. **35.** $\operatorname{tg}\alpha$. **36.** $\operatorname{ctg}\alpha$.
37. $\operatorname{cosec}\alpha$. **38.** $\cos\alpha$. **39.** $\operatorname{tg}^2\alpha$.
40. $2\sin^2\alpha$. **41.** $2\cos^2\alpha$. **42.** 1. **43.** 1.
44. $\operatorname{tg}^2\alpha$. **45.** $\sec^2\alpha$. **46.** $\sec^2\alpha$. **47.** $\operatorname{cosec}^2\beta$.
48. $\operatorname{cosec}^2\alpha$. **49.** $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$. **50.** $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$. **51.** 4.
52. $\operatorname{ctg}^6\alpha$. **53.** a) $2\sin^2\alpha-1$; b) $1-2\cos^2\alpha$. **54.** $\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$.
55. $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$. **56.** $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}$. **57.** a) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-1}{\operatorname{tg}\alpha+1}$; b) $\dfrac{1-\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}$.
58. a) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; b) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}$. **59.** $\sec\alpha=-\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}$.
60. 9. **61.** $\dfrac{m^2-1}{2}$. **62.** m^2-2 и m^3-3m.

93. $\pm 90^\circ+360^\circ n$. **94.** $\pm 60^\circ+360^\circ n$. **95.** $\pm 52^\circ+360^\circ n$.
96. $360^\circ n$. **97.** $\pm 128^\circ+360^\circ n$. **98.** $\pm 27^\circ+360^\circ n$.
99. $180^\circ n$. **100.** $63^\circ+180^\circ n$ и $-27^\circ+180^\circ n$.
101. $(-1)^n\cdot 24^\circ+180^\circ n$. **102.** $\pm 90^\circ+360^\circ n$ и $\pm 60^\circ+360^\circ n$.
103. $\pm 120^\circ+360^\circ n$. **104.** $27^\circ+180^\circ n$. **105.** $\pm(-1)^n\cdot 45^\circ+180^\circ n$.
106. $\pm 60^\circ+360^\circ n$ и $\pm 120^\circ+360^\circ n$. **107.** $\pm(-1)^n\cdot 60^\circ+180^\circ n$.
108. $360^\circ n$ и $90^\circ+360^\circ n$. **109.** $45^\circ+180^\circ n$. **110.** $60^\circ+180^\circ n$.
111. $30^\circ+180^\circ n$. **112.** $45^\circ+180^\circ n$ и $-72^\circ+180^\circ n$.
113. $76^\circ+180^\circ n$ и $-63^\circ+180^\circ n$.

§ 4.

1. 1) $\cos 17^\circ$; 2) $\sin 9^\circ 20'$; 3) $\operatorname{ctg} 20^\circ 34' 20''$; 4) $\operatorname{tg} 30^\circ 1'$.
2. 1) $\sin 67^\circ 40'$; 2) $-\cos 80^\circ 34' 25''$; 3) $-\operatorname{tg} 71^\circ 11' 24''$; 4) $-\operatorname{ctg} 39^\circ 20'$.
3. 1) $\cos 31^\circ 40'$; 2) $\sin 16^\circ 25'$; 3) $-\cos 21^\circ 43'$; 4) $-\sin 8^\circ 21'$;
5) $-\operatorname{tg} 19^\circ 32' 28''$; 6) $-\operatorname{ctg} 16^\circ 32'$; 7) $-\operatorname{tg} 30^\circ 28' 40''$; 8) $-\operatorname{ctg} 39^\circ 18'$.
4. -1. **5.** $\cos\alpha$. **6.** $-\cos\alpha$. **7.** $-\sec\alpha$.
8. 0. **9.** 0. **10.** 1. **11.** $-\sin^2\alpha$.
12. 0. **13.** $2\cos\alpha$. **14.** 1.

§ 5.

1. 1) 0,2588; 2) 0,7071; 3) 0,8660; 4) 0,9563; 5) 0,6225; 6) 0,9361; 7) 0,2051; 8) 0,9988;

2. 1) 0,3640; 2) 1; 3) 11,43; 4) 3,172; 5) 0,3191; 6) 1,3375; 7) 0,3796; 8) 8,284; 9) 12,61; 10) 38,19; 11) 286,5, 12) 3,438.

3. 1) 0,4226; 2) 0,7071; 3) 0,8660; 4) 0,2924; 5) 0,7826; 6) 0,9375; 7) 0,4823; 8) 0,1948; 9) 0,9987; 10) 0,9997.

4. 1) 2,747; 2) 1; 3) 1,3032; 4) 0,3365; 5) 0,3796; 6) 2,805; 7) 0,0306; 8) 11,43; 9) 23,37; 10) 0; 11) 33,41.

5. 1) 20°; 2) 36°30′; 3) 57°21′; 4) 68°20′; 5) невозможно; 6) 23°9′.

6. 1) 24°; 2) 85°; 3) 69°30′; 4) 28°36′; 5) 79°48′; 6) 26 34′; 7) 22°47′; 8) 85°34′; 9) 81°25′.

7. 1) 27°; 2) 24°30′; 3) 50°30′; 4) невозможно; 5) 35°2′; 6) 63°21′.

8. 1) 20°; 2) 67°30′; 3) 29°29′; 4) 33°47′; 5) 55°13′; 6) 30°33′; 7) 8°; 8) 5°35′; 9) 2°52′.

9. 0,9659; 0,1368; 0,6395; 0,9036.

10. — 0,4695; — 0,9171; — 0,1513; — 0,9825.

11. — 1,6643; — 0,3561; — 4,836; — 0,6334.

12. — 11,43; — 0,6873; — 6,472; — 0,3876.

§ 6.

1. 1) $\sin\alpha = 0{,}96$; $\operatorname{tg}\alpha = 3\frac{3}{7} \approx 3{,}429$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$; $\cos\alpha = 0{,}8$; 3) $\operatorname{tg}\beta \approx 6{,}462$; $\cos\beta \approx 0{,}1529$.

2. $\sin\beta = \frac{77}{85}$; $\cos\beta = \frac{36}{85}$; $\operatorname{tg}\beta = 2\frac{5}{36}$; $\operatorname{ctg}\beta = \frac{36}{77}$.

3. 1) 20,4 *см*; 2) 68 *см*.

4. 1) 10,08 *м*; 2) 30,6 *дм*.

5. 1) 2,56 *км*; 2) 2,39 *км*.

6. 947 *м*.

7. 12°43′.

8. 3647 *м*.

9. 20 *м*.

10. 35,5 *м*.

11. 27 *м*.

12. 1°54′.

13. 4°55′.

14. 2°57′; 727 *м*.

15. $b\sin\alpha - a = 10{,}5$ *м*.

16. 3,9 *м*.

18. 33°41′.

19. 40 *м*.

20. 1) 63°26′; 2) 26°34′; 3) 21°48′.

21. $\operatorname{arc\,tg}\frac{n}{n-1} = 47°52'$.

22. 30°58′.

23. $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$.

24. 33°41′.

25. 21 *см*.

26. 1278 *м*.

27. $r = 1{,}58$ *м*; $x = 1{.}97$ *м*.

28. $\frac{a}{2\cos\beta}$.

29. 6°51′; 128,8 *мм*.

30. $h = 10(D - d)$; 2°52′.

31. 38°40′.

32. 63 *м*.

33. 2,6 *м*.

34. 36°39′.

35. 73°58′.

36. 2,698.

37. 47°16′; 32,8 *м*.

38. 97°10′.

39. $\frac{c}{2\pi} \cdot \cos\frac{180°\, m}{m+n} \approx 11{,}2$.

40. $\frac{a}{2\sin\alpha}$. *Указание.* За одну из сторон угла принять диаметр.

41. 52°14′; 7,148 *кг*. 42. $b(1+\sec\alpha)$. 43. $\arcsin\frac{h}{b}$.

44. 42°. 45. 78°42′.

46. 69°15′ к востоку или западу.

47.

α	5 *дм*	15 *дм*
40°	3,2 *дм*	9,6 *дм*
60°	4,3 »	13,0 »
90°	5 »	15 »

48. 26,6 *км* к востоку и 21,7 *км* к северу. 49. 40°12′ и 49°48′.

50. 57°28′. 51. 67°49′ и 22°11′. 52. 120°30′ и 59°30′.

53. $OB \approx 0{,}35$ *м*; $AB \approx 0{,}2$ *м*; $\beta = 5°48'$; $BP \approx 1{,}99$;
3) 0; 1°59′; 3°55′; 5°44′;
7°23′; 8°49′; 9°59′; 10°50′; 11°22′; 11°32′;
5) 11°19′; 6) 0; 5 *мм*; 22 *мм*;
48 *мм*; 83 *мм*; 125 *мм*; 173 *мм*; 224 *мм*; 277 *мм*; 330 *мм*.

54. 47°30′. 55. $\alpha = 40°42'$; $\beta = 19°15'$.

56. 1) 82°27′; 2) 8°43′. 57. 53°8′.

58. $R = \frac{a}{2\cos\frac{\beta}{2}}$; $r = a\sin\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\left(45° - \frac{\beta}{4}\right)$.

59. $\alpha = \arcsin\frac{h}{b}$; $a = \frac{h}{\cos\alpha}$; $c = \frac{b}{\cos\alpha}$. 60. 11°26′.

61. 28°; 37°; 19°; 53°; 86°; 113°. 62. 21 754 *км*.

63. 4°52′. 64. 1°11′. 65. 51°05′.

§ 7.

1. 1) $b = 61$; $c = 102$; 2) $a = 39$; $b = 25$.
2. 78,7 *м*. 3. 21,1 *м*.
4. $\frac{b\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}$. 5. $\frac{b\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha}$.
6. $\frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ и $\frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.
7. $l_b = \frac{a\sin\gamma}{\sin\left(\frac{\beta}{2}+\gamma\right)}$; $l_c = \frac{a\sin\beta}{\sin\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)}$; $l_a = \frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$.
8. $\frac{c\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \approx 146$ *м*.
9. $a = \frac{h_a\sin\alpha}{\sin\gamma\sin(\alpha+\gamma)}$; $b = \frac{h_a}{\sin\gamma}$; $c = \frac{h_a}{\sin(\alpha+\gamma)}$.
10. 7880 *м*². 11. $\frac{1}{2}b^2\sin\alpha \approx 48$ *м*².
12. При $\gamma = 90°$. 15. $a^2\sin\alpha \approx 21$ *см*²
16. $\frac{d^2\sin\varphi}{2}$; максимум равен $\frac{d^2}{2}$ при $\varphi = 90°$.

17. $\frac{a+b}{2}\cdot c\sin\alpha$.
18. 50°33′ и 129°27′.
19. 46°56′ и 133°4′.
20. 360 $м^2$.
21. $AE=\sqrt{\frac{2Q\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}}$; $AD=\sqrt{\frac{2Q\sin\gamma}{\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\gamma)}}$.
22. $\frac{h_a h_b}{2\sin\gamma}$.
23. $\frac{h_b^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$.
24. $a=8{,}5$.
25. 1) $c=22$; $\alpha=22°12''$; $\beta=34°31'$; 2) $b=0{,}4$; $\alpha=10°49'$; $\gamma=145°43'$; 3) $b=63$; $\alpha=153°6'$; $\gamma=10°26'$.
26. 77 $м$.
27. 117°17′.
28. 8,1 $м$ и 4,0 $м$.
29. 275 $кг$; 16°17′ и 33°43′.
30. 1633 $м$.

§ 8.

1. $\cos 162°30'=-\cos 17°30'$. 2. $\sin 340°=-\cos 70°$.
3. $\sin 75°=\cos 15°$; $\sin 150°=\sin 30°$.
4. a) $-\sin 20°$; b) $\cos 10°$; c) $\sin 30°$; d) $\cos 20°$.
5. e) $\operatorname{ctg} 30°$; f) $-\operatorname{tg} 40°$; g) $\operatorname{ctg} 45°$; h) $\operatorname{tg} 30°$.
6. i) $-\operatorname{cosec} 10°$; k) $\sec 10°$; l) $\operatorname{cosec} 40°$; m) $-\sec 10°$.
7. a) $\cos 0{,}2\pi$; b) $\cos\frac{2}{9}\pi$; c) $-\operatorname{tg}\frac{2}{11}\pi$; d) $-\sec 0{,}1\pi$.
8. a) 1; b) 1; c) 0; d) 0.
9. a) $-\frac{1}{2}$; b) 0; c) $\sqrt{3}$; d) -1.
10. $\cos 50°=-\cos 130°$.
11. $-2\operatorname{ctg}\alpha$.
12. $2\cos\alpha$.
13. 1.
14. -1.
15. $a^2+b^2-2ab\cdot\cos\alpha$.
16. $-\operatorname{tg}^3\alpha$.
17. $\operatorname{ctg}\alpha$.
18. $-\cos\alpha$.
19. 0.
20. $\operatorname{ctg}^2 42°$.
21. $-\operatorname{ctg}^2 40°$.
22. $\sin(\alpha-90°)=-\cos\alpha$; $\cos(\alpha-180°)=-\cos\alpha$; $\operatorname{tg}(\alpha-360°)=\operatorname{tg}\alpha$.
23. $\cos x=-\frac{2}{3}$.
24. $\sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.
25. $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
26. $360°\cdot n$.
27. $135°+180°\cdot n$.
28. $\frac{\pi}{4}+\pi n$.
29. $\pi\cdot n\pm\frac{\pi}{4}$.
30. $\pm 90°+360°\cdot n$.

§ 9.

1. -1.
2. a) $\sin\alpha$; b) $-\sin\alpha$.
3. $0{,}4\sqrt{3}+0{,}3$.
4. $\sqrt{0{,}2}-\sqrt{0{,}15}$.
5. $0{,}2+\sqrt{0{,}63}$; $-\sqrt{0{,}21}-\sqrt{0{,}12}$.
6. $\frac{1}{12}(\sqrt{35}-6)$; $\frac{1}{12}(3\sqrt{5}-2\sqrt{7})$.
7. ± 1; $\pm 0{,}28$.
8. $\frac{1}{2}$.
9. a) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$; $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$; b) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$; $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$.
12. a) $\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$ и $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$; b) $\frac{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}$ и $\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}$.
13. $\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$; $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

14. $\frac{56}{65}$ и $\frac{57}{1625}$. 15. $\frac{1 \pm \operatorname{tg}\alpha}{1 \pm \operatorname{tg}\alpha}$. 16. $-(2+\sqrt{3})$.

17. $-\frac{1}{2}$. 18. -1 и $\frac{1}{7}$. 19. $\frac{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta \pm 1}$.

20. a) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta \pm 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}$; b) $\frac{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}$.

21. $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\gamma \cdot \operatorname{tg}\alpha}$. 22. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

23. $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$. 24. $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$. 25. $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta$.

26. $\operatorname{tg}\alpha$. 41. $-45° + 180°n$. 42. $(-1)^n \cdot 60° + 180°n$.

43. $x = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma) + 180° \cdot n$. 44. $\pm 30° + 180°n$.

45. $x = 30° + 360° \cdot n$; $150° + 360°.n$. 46. $\operatorname{tg} x = \frac{a - b \cdot \operatorname{tg}\alpha}{a \cdot \operatorname{tg}\alpha - b}$.

47. $\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{\frac{m + \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + m \operatorname{tg}^2\alpha}}$. 48. $x = 180° \cdot n$ или $x = \pi n$.

49. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \cdot n$. 50. $x = 90° \cdot n$; $60° \cdot n$. 51. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

52. $14°38' + 180°\, n$.

53. $45° + 180°n$. 54. $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

§ 10.

1. a) $\pm 0{,}96$; $-0{,}28$; b) $\frac{3}{4}$. 2. $\frac{120}{169}$; $-\frac{119}{169}$.

4. $-0{,}96$; $-0{,}28$. 5. $-\frac{2}{3}\sqrt{2}$; $-\frac{1}{3}$. 6. $-\frac{3}{4}$.

7. a) $\pm 2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}$; $1 - 2\sin^2\alpha$; b) $\pm 2\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}$; $2\cos^2\alpha - 1$.

8. a) $\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$; b) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$. 9. $\frac{\sec^2\alpha}{2 - \sec^2\alpha}$.

10. a) $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$; $\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$; b) $-\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

11. $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. *Указание.* Сначала пишем:

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}} \text{ и } \cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

12. Так как через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ остальные функции угла α выражаются рационально, то достаточно рассмотреть $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$; относительно же их см. решение задачи 11.

13. $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{13}$; 2,4. 14. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; 1.

15. $3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; $4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$; $\frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

16. $4\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha - 4\cos\alpha\cdot\sin^3\alpha$; $\cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha + \sin^4\alpha$.

17. $\sqrt{0{,}9}$; $-\sqrt{0{,}1}$; -3.

18. $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $2-\sqrt{3}$; $2+\sqrt{3}$.

19. $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $\sqrt{2}-1$; $\sqrt{2}+1$.

20. $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$. 21. $\frac{4}{5}$. 22. $\sqrt{5}-2$.

25. Имеем: $\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1$ и $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha$; отсюда найдем:

$$\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{1+\sin\alpha} \text{ и } \sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{1-\sin\alpha}.$$

С помощью этих равенств получим для $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ по *четыре* значения. Но если перед тем и другим корнем знак можно будет *выбрать*, — добавив какое-нибудь новое условие, — то задача будет иметь только *одно* решение.

26. $\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha \pm \sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}$. 27. -2.

52. $x = 15° + 180°\cdot n$; $75° + 180°\cdot n$ или $x = \frac{\pi}{2}\cdot n + (-1)^n\cdot\frac{\pi}{12}$.

53. $x = \pm\frac{\pi}{3} + n\pi$. 54. $x = 22°30' + 90°\cdot n$ или $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\cdot n$.

55. $x = \pi n$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$. 56. $\cos\frac{x_1}{2} = 0$; $\sin\frac{x_2}{2} = \frac{b}{2a}$.

57. $x = \pm 45° + 360°\cdot n$; $\pm 135° + 360°\cdot n = 45° + 90°\cdot m$.

58. $x_1 = x_2 = 360°\cdot n$; $x_3 = \pm 120° + 360°\cdot n$ или $x = 360°\cdot n$; $120°\cdot m$.

59. $x = \pm 30° + 180°\cdot n$. 60. $x = \pi n$. 61. $x = \pi n$; $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$.

62. $\cos\frac{x_1}{2} = 0$; $\cos\frac{x_2}{2} = \frac{b}{2a}$.

63. $x = 360°\cdot n$; $60° + 720°\cdot n$; $300° + 720°\cdot n$.

64. $\cos\frac{x_1}{2} = 0$; $\operatorname{tg}\frac{x_2}{2} = \frac{a}{b}$. 65. $x = 2\pi n$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

66. $\cos x = \frac{m-2\pm\sqrt{m(m-8)}}{2(m+1)}$.

67. $x_1 = x_2 = \pi + 2\pi n$; $x_3 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ или $x = \pi + 2\pi n$; $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\cdot m$.

68. $x = 180°\cdot n$; $\pm 30° + 180°\cdot n$. 69. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

70. $x = \pm 45° + 360°\cdot n$; $\pm 135° + 360°\cdot n$; $\pm 30° + 360°\cdot n$; $\pm 150° + 360°\cdot n = 45° + 90°\cdot m$; $\pm 30° + 180°\cdot m$.

71. $\sin 4x = 1$; $x_1 = x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \cdot n$. **72.** $72°52' + 360°n$ и $17°8' + 360°n$.

73. $119°34' + 360°n$ и $-13°18' + 360°n$.
74. $90° + 360°n$ и $30° + 360°n$.

§ 11.

1. a) $\sqrt{1{,}5}$; b) $\sin 18°$; c) 0; d) $-\sin 18°$.
2. a) $2 \sin 12°30' \cdot \cos 7°30'$; b) $-2 \sin 1° \cdot \cos 4°$; c) $2 \cos 10°7'30'' \cdot \cos 6°52'30''$; d) $2 \sin 15° \cdot \sin 10°$.
3. a) $\cos \alpha$; b) $2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$.
4. a) $\frac{\operatorname{tg} 20°}{\operatorname{tg} 5°}$; b) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta-\alpha}{2}$.
5. a) $2 \sin 35° \cdot \cos 15°$; b) $\sqrt{2} \cdot \sin 25°$;
c) $2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - 45°\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + 45°\right)$.
6. $\sqrt{2} \cdot \cos(\alpha - 45°)$; $\sqrt{2} \sin(\alpha - 45°)$. Или $\sin \alpha \pm \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin(\alpha \pm 15°)$.
7. a) $\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$; b) $\frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$; c) $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \sin \beta}$; d) $\frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \cdot \cos \beta}$.
8. a) $2 \operatorname{cosec} 2\alpha$; b) $-2 \operatorname{ctg} 2\alpha$.
9. a) $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)$; b) $\sin(\beta + \alpha) \cdot \sin(\beta - \alpha)$.
10. a) $\frac{\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha-\beta)}{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta}$; b) $\frac{\sin(\beta+\alpha \cdot \sin(\beta-\alpha)}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}$;
c) $-\frac{\cos(\alpha+\beta) \cdot \cos(\alpha-\beta)}{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}$; d) $-4 \operatorname{ctg} 2\alpha \operatorname{cosec} 2\alpha$.
11. a) $2 \cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$; b) $-2 \sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$; c) $\cos 2\alpha$; d) $-\cos 2\alpha$.
12. $2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$. **13.** $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} - 45°\right)$. **14.** $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.
15. a) $\frac{\sin(45° \pm \alpha)}{\cos 45° \cdot \cos \alpha}$; b) $\frac{\sin(\alpha \pm 45°)}{\sin 45° \cdot \sin \alpha}$.
Указание. $1 = \operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45°$.
16. $\frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\cos \alpha \cdot \sin \beta}$. **17.** a) $2 \sin\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)$; b) $2 \sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$.
18. $2 \sin\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt{\operatorname{tg} \alpha}$.
19. a) $\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)$; b) $\cos(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)$.
20. a) $\sqrt{8} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - 45°\right)$; b) $\sqrt{8} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 45°\right)$.
Указание. Сначала заменяем $1 + \cos \alpha$ и $1 - \cos \alpha$.
21. $-4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha$.
22. a) $\frac{\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}$; b) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)}$.

23. а) $\frac{\sqrt{8}\cdot\sin(45^\circ+\alpha)}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$; b) $\frac{\sqrt{8}\cdot\sin(45^\circ-\alpha)}{\cos\alpha}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

24. а) $-\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$; b) $\frac{\sin(\alpha-45^\circ)}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

25. а) $4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$; b) $4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$.

Указание. Выражаем $\sin(\alpha+\beta)$ через $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

26. $4\cos\alpha\cdot\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$.

33. Сначала исключаем (в левой части) угол γ, полученное выражение преобразуем и снова вводим γ.

40. Прием тот же, что и в задаче 39.

41. В равенстве $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-\operatorname{tg}\gamma$ раскрываем скобки и освобождаемся от знаменателя.

42. Применяя тот же прием, что и в задаче 39, сначала заменим левую часть равенства так: $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$; затем после некоторых преобразований получим выражение: $\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta(\sin\alpha\cdot\sin\beta-\cos\alpha\cdot\cos\beta)+1}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)}$ и т.д.

43. В равенстве $\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=1:\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ раскрываем скобки и освобождаемся от знаменателей.

44. Прием тот же, что и в задаче 43.

45. В равенстве $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=-\operatorname{ctg}\gamma$ раскрываем скобки и освобождаемся от знаменателя.

46. Прием тот же, что и в задаче 39. Сначала получим $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2(\alpha+\beta)$, затем раскрываем скобки и заменяем $\sin^2\alpha$ и $\sin^2\beta$ через $1-\cos^2\alpha$ и $1-\cos^2\beta$ и т. д.

47. Прием такой же, как и в предыдущей задаче. Сначала получим $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2(\alpha+\beta)$, затем раскрываем скобки и заменяем $\sin^2\alpha$ и $\sin^2\beta$ через $1-\cos^2\alpha$ и $1-\cos^2\beta$ и т. д.

48. Прием такой же, как в задаче 39. Сначала получим $2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)$ и т. д.

49. Прием такой же, как в предыдущей задаче.

50. $4\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

51. $4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+30^\circ\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}-30^\circ\right)$.

52. $4\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

53. а) $4\cos\left(2\cdot30'+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(22^\circ30'-\frac{\alpha}{2}\right)$;

b) $\sqrt{8}\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}+22^\circ30'\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}-22^\circ30'\right)$.

54. $3-4\sin^2\alpha=4(\sin^260^\circ-\sin^2\alpha)=$
$=4\sin(60^\circ+\alpha)\cdot\sin(60^\circ-\alpha)$.

55. $4\sin(\alpha+30^\circ)\cdot\sin(\alpha-30^\circ)$. 56. $\frac{4\sin(30^\circ+\alpha)\cdot\sin(30^\circ-\alpha)}{\cos^2\alpha}$.

57. $\dfrac{4\sin(\alpha+30^\circ)\cdot\sin(\alpha-30^\circ)}{\sin^2\alpha}$.

58. $4\cos\alpha\cdot\cos\left(30^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(30^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

59. a) $4\sin 2\alpha\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}+30^\circ\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-30^\circ\right)$.

b) $4\cos 2\alpha\cdot\sin\left(30^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(30^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

60. 1) $\dfrac{a}{\cos\varphi}$ при $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{b}{a}$; 2) $\rho\cdot\cos^3\dfrac{\varphi}{2}=\sqrt{q}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$ при $\sin\varphi=\dfrac{2\sqrt{q}}{\rho}$.

61. Вынося a за скобки и полагая $\dfrac{b}{a}=\cos\varphi$, получим:

1) $\operatorname{ctg}^2\dfrac{\varphi}{2}$; 2) $2\sqrt{a}\cdot\sin\left(45^\circ+\dfrac{\varphi}{2}\right)$; 3) $2\operatorname{cosec}\varphi$.

62. $x=\sqrt{(a+b)^2-2ab(1+\cos\alpha)}=\dots=(a+b)\cdot\cos\varphi$, причем $\sin\varphi=\dfrac{2\sqrt{ab}}{a+b}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

63. $x=90^\circ\cdot n$; $90^\circ+180^\circ\cdot n$. 64. $x=36^\circ+72^\circ\cdot n$; $60^\circ+120^\circ\cdot n$.

65. $x=\dfrac{\pi}{2}\cdot n$; $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}\cdot n$. 66. $x=120^\circ\cdot n$; $360^\circ\cdot n$.

67. $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$; $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2}\cdot n$.

68. $\sqrt{2}\cdot\sin(x+45^\circ)=1$; $x=360^\circ\cdot n$; $90^\circ+360^\circ\cdot n$.

Упражнение. Данное уравнение решить возвышением обеих частей его в квадрат и в полученных корнях ($x=90^\circ\cdot n$) найти *посторонние*.

69. $x=-\dfrac{\pi}{4}\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$. 70. $x=9^\circ+180^\circ\cdot n$; $81^\circ+180^\circ\cdot n$.

71. $x=33^\circ45'+90^\circ\cdot n$.

72. $x=7^\circ30'+90^\circ\cdot n$; $37^\circ30'+90^\circ\cdot n$ или $x=\dfrac{\pi}{4}\cdot n+(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{24}$.

73. $x_1=x_2=22^\circ30'+90^\circ\cdot n$. 74. $x=45^\circ+90^\circ\cdot n$; $\pm 60^\circ+360^\circ\ n$.

75. $x=\dfrac{\pi}{2}\cdot n;\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$.

76. 2. 77. ∞. 78. 0. 79. 1. 80. -1. 81. $-\dfrac{1}{2}$.

82. 2. 83. 0. 84. $2\sin^2\alpha$.

85. $\pm\infty$. *Указание.* $1-\sin 2\alpha=(\cos\alpha-\sin\alpha)^2$.

86. 2. 87. $\pm\infty$. 88. 0. 89. $\cos\alpha$. 90. $\sec^2\alpha$.

§ 12.

1. c) 9,55800 — 10; d) 9,86558 — 10; e) 9,90237 — 10; f) 8,38433 — 10.
2. c) 9,85029 — 10; d) 9,66015 — 10; e) 9,93747 — 10; f) 7,83786 — 10.
3. b) 9,46110 — 10; c) 0,45605; d) 9,39691 — 10; e) 8,18143 — 10; f) 1,83950.
4. b) 0,42850; c) 9,35098—10; d) 9,99985 — 10; e) 8,54465 — 10; f) 2,34129.
5. c) 28°12′55″; d) 59°13′43″; e) 48°35″; f) 25′16″.
6. c) 27°2′50″; d) 45°1′18″; e) 50°28″; f) 89°20′40″.

7. c) 16°6′51″; d) 50°3′3″; e) 45°36″; f) 7′42″.
8. c) 22°55′18″; d) 77°41′38″; e) 45°12″; f) 89°25′37″.
9. a) 0,34202; b) 0,6742о; c) 3,7347; d) 229,18; e) 1,3054; f) 1,2514.
10. a) — 0,76603; b) 0,93970; c) — 2,7726, d) — 0,18033; e) — 5,7588; f) 1,567.
11. a) 34°51′; b) 67°5′12″; c) 75°57′50″; d) 5°42′38″; e) 48°11′21″; f) 22°9′53″; g) 9°50′48″; h) 20°18′52″.
12. 27°2′10″; 152°57′50″.
13. 223°; 317°.
14. 40°20′49″; 319°39′11″.
15. 124°40′; 235°20′.
16. 26°30′; 206°3Ј.
17. 111°57′38″; 291°57′38″.
18. 11°18′35″. 191°18′35″.
19. 126°10′; 306°10′.
20. 86°10′39″; 273°49′21″.
21. 113°34′41″; 246°25′19″.
22. 5°44′21″; 174°15′39″.
23. 231°3′30″; 308°56′3Ј″.
24. 74°25′15″.
25. 35°38′29″.
26. 56°1′.
27. — 23°14′5Ј″.
28. 164°16′40″.
29. — 15°24′37″.
30. 28°21′ 32″.
31. — 54°6′.
32. 103,69.
33. —0,47985.
34. 0,0010936.
35. $x = 4{,}7106$
36. $x = 0{,}23076$.
37. $x = 342{,}42$.
38. $x = -1{,}2062$
39. $x = 0{,}61701$,
40. $x = 32{,}396$

41. $\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi$; $x = a\cdot\sin\alpha\cdot\sec\varphi = 0{,}009327$.

	a	b	c	A	B	S
42.	8,49	3,917	(9,35)	(65°14′)	24°46′	16,628
43.	250,02	575	(627)	(23°30′)	66°30′	71,880
44.	0,73233	0,31680	(0,79792)	(66°36′24″)	23°23′3Ј″	0,116)0
45.	2,7912	2,3418	(3,6435)	(50°0′12″)	39°59′48″	3,2683
46.	(6,37)	79,46	79,715	(4°35′)	85°25′	253,08
47.	(18,003)	16,788	24,616	47°	(43°)	151,12
48.	0,12592	(0,1733)	0,21462	(35°55′24″)	54°4′36″	0,010942
49.	0,6158	(0,29544)	0,6830	64°22′12″	(25°37′48″)	0,090966
50.	(16)	63	(65)	14°15′	75°45′	504
51.	112	(15)	(113)	82°22′19″	7°37′41″	840
52.	(528)	455	(697)	49°14′49″	40°45′11″	120 120
53.	1499,2	(823)	(1710,2)	61°14′5″	28°45′55″	616 910
54.	(261)	(380)	461	34°29′	55°31′	49 590
55.	(156)	(133)	205	49°33′	40°27′	10 374
56.	(0,097836)	(0,10003)	0,13392	44°21′53″	45°38′7″	0,0048933
57.	(12,007)	(6,9194)	13,858	60°2′44″	29°57′16″	41,54

58. $B = 46°47′12″$; $b = 633{,}6$; $S = \frac{a^2}{2}\cdot\sin 2A = 232{,}010$.

59. $A = 23°30′$; $b = 1150$; $S = \frac{a^2}{2}\cdot\sin B = 143\,76)$.

60. $B = 60°29\,20'$; $a = 15{,}543$; $S = \frac{b^2}{4} \cdot \operatorname{tg} A = 105{,}13$.

61. $A = 64°24'30''$; $a = 6{,}4$; $S = \frac{b^2}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} = 15{,}957$.

62. $A = 37°9'36''$; $B = 105°40'48''$; $S = 36{,}917$.

63. $A = 57°19'45''$; $B = 65°20'30''$; $a = 857$; $S = \frac{b}{2} \cdot h = 333\,730$.

64. $B = 48°40'$; $b = h_1 : \sin A = 21{,}95$; $a = h_1 : \sin 2A = 26{,}636$;
$S = \frac{1}{2} ah_1 = \frac{1}{2} h_1^2 : \sin 2A = 266{,}36$.

65. $\operatorname{tg} A = S : \left(\frac{b}{2}\right)$ $A = 24°36'$; $B = 130°48'$; $a = \frac{b}{2} : \cos A = 71{,}883$.

66. $A = 53°29'53''$; $a = \sqrt{2S : \sin B} = 306{,}9$; $b = 365{,}12$.

67. $B = 34°26'44''$; $a = p : 2\cos^2\frac{A}{2} = 15{,}682$; $b = 9{,}2864$;
$S = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \operatorname{tg} A = 69{,}55$.

68. $A = 73°23'54''$; $B = 33°12'12''$; $a = 30{,}219$; $b = 17{,}267$.

69. $B_1 = 34°51'$; $B_2 = 145°9'$; $A_1 = 72°34'30''$; $A_2 = 17°25'30''$;
$b_1 = 8{,}385$; $b_2 = 26{,}715$.

Указание. Для угла B имеем $\sin B = \dots$ и $0 < B < 180°$. а в этих границах синус дает *два* угла. Пояснить двойственность решения также геометрически.

§ 13.

	a	b	c	A	B	C	S
1.	(370)	541	421	43°1′24″	(86°3′)	(50°55′36″)	77 709
2.	(450)	85	445	(87°55′)	(10°52′51″)	81°12′9″	18 900
3.	(951)	1196	353	39°35′52″	(126°43′)	(13°41′8″)	134 550
4.	(97,515)	83	36	(102°48′)	56°6′	(21°6′)	1455,9
5.	3,688	(13,024)	10,200	(11°48′45″)	(133°42′15″)	34°29′	13,597
6.	13,311	5,337	(15,948)	(51°33′31″)	(18°19′29″)	110°2′	33,372
7.	(5'0)	(319)	533	68°23′8″	35°18′	(76°18′52″)	78 540
8.	(225)	(800)	634,14	12°15′6″	131°0′54″	(36°44′)	53 829
9.	(2,296)	1,183	(1,687)	104°53′51″	(29°51′46″)	45°14′23″	0,96432
10.	62,154	(28)	(42)	(124°)	21°55′48″	34°4′12″	487,48
11.	(30,986)	74,55	(69,014)	24°32′22″	(87°47′16″)	67°40′22″	1068,4
12.	43,922	(40,326)	(32,114)	(73°40′)	61°46′24″	44°33′36″	621,4

	a	b	c	A	B	C	S
13.	(87)	(65)	76	(75°45′)	46°23′50″	57°51′10″	2 394
14.	(34)	(93)	115,28 или 65	(14°15′)	42°19′21″ или 137°40′39″	123°25′39″ или 28°4′21″	1319,5 или 744
15.	(24)	(83)	—	(26°45′)	—	—	—
16.	615,67 или 55,41	(360)	(339)	133°47′41″ или 3°43′29″	24°57′54″ или 155°2′6″	(21°14′25″)	40 147 или 3613,3
17.	(13,897)	7,109	(8,425)	(126°42′36″)	24°12′40″	29°4′44″	24, 03
18.	(0,4366)	(1,2987)	1,7245	3°41′46″	(11°3′20″)	165°14′54″	0,072188
19.	(13,807)	20,714 или 6,0076	(8,136)	25°20′32″ или 154°39′28″	140°2′56″ или 10°44′	(14°36′32″)	36,067 или 10,460
20.	240,48	(263,09)	(215,4)	59°21′	(70°14′42″)	50°24′18″	24 376
21.	(19,058)	(28,193)	36,298 или 11,892	(31°16′47″)	50°11′6″ или 129°48′54″	98°32′7″ или 18°54′19″	265,68 или 87,044
22.	(457,08)	(169,93)	—	—	(21°49′45″)	—	—
23.	(2579,8)	2573,4	(10)	(130°21′35″)	49°28′16″	0°10′9″	9804,4
24.	(19)	(34)	(49)	16°25′36″	30°24′	133°10′24″	235,56
25.	(89)	(321)	(395)	7°57′46″	29°58′34″	142°3′42″	8782,6
26.	(44)	(483)	(485)	5°12′18″	84°47′40″	90°	10 626
27.	(0,099)	(0,101)	(0,158)	37°22′20″	38°15′42″	104°22′	0,0048432
28.	(172,5)	(1134,7)	(1205,4)	7°42′52″	62°0′20″	110°16′44″	91 802
29.	(421,63)	(409,87)	(335,94)	68°1′12″	64°20′52″	47°38′	63 841
30.	(1,2345)	(2,3456)	(3,4567)	10°50′30″	20°56′26″	148°13′8″	0,76257

31. $C=18°26'16''$; $a=2R\cdot\sin A=14{,}557$; $b=2R\cdot\sin B=11{,}828$; $c=2R\cdot\sin C=5{,}012$; $S=2R^2\cdot\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C=27{,}228$.

32. $C=119°30'57''$; $a=\sqrt{\dfrac{2S\cdot\sin A}{\sin B\cdot\sin C}}=20{,}865$; $b=55{,}293$; $c=68{,}04$.

33. $A=59°41'$; $c=\dfrac{h_a}{\sin B}=5{,}9344$; $b=\dfrac{h_a}{\sin C}=59{,}92$;

$a=\dfrac{h_a\cdot\sin A}{\sin B\cdot\sin C}=57{,}154$; $S=\dfrac{h_a^2}{2}\cdot\dfrac{\sin A}{\sin B\cdot\sin C}=153{,}48$.

34. $A=77°4'$; $c=\dfrac{l_a}{\sin\frac{B}{2}}\cdot\cos\dfrac{B-C}{2}=0{,}52271$;

$b=\dfrac{l_a}{\sin\frac{C}{2}}\cdot\cos\dfrac{B-C}{2}=6{,}7127$; $a=\dfrac{l_a\cdot\sin A}{\sin B\cdot\sin C}\cdot\cos\dfrac{B-C}{2}=6{,}6154$;

$S=\dfrac{l_a^2}{2}\cdot\dfrac{\sin A}{\sin B\cdot\sin C}\cdot\cos^2\dfrac{B-C}{2}=1{,}7099$.

35. $a=\dfrac{m}{2}\cdot\sin A\sec\dfrac{C}{2}\cdot\sec\dfrac{A-B}{2}$; $b=\dfrac{m}{2}\cdot\sin B\sec\dfrac{C}{2}\cdot\sec\dfrac{A-B}{2}$;

$c=m\cdot\sin\dfrac{C}{2}\cdot\sec\dfrac{A-B}{2}$; $S=\dfrac{m^2}{4}\cdot\sin A\sin B\cdot\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}\sec^2\dfrac{A-B}{2}$; $C=69°20'$; $a=289{,}9$; $b=198{,}9$; $c=287{,}93$; $S=26\,976$.

Указание. Имеем $m=2R(\sin A+\sin B)=\ldots$, откуда определяем $2R$, а затем с помощью $2R$ составляем выражения для сторон.

36. $C=54°$; $a=\frac{n}{2}\cdot\sin A\cdot\operatorname{cosec}\frac{A-B}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{C}{2}=34{,}07$;

$b=\frac{n}{2}\sin B\cdot\operatorname{cosec}\frac{A-B}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{C}{2}=11{,}07$; $c=n\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{A-B}{2}=28{,}981$;

$S=\frac{n^2}{4}\cdot\sin A\cdot\sin B\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\cdot\operatorname{cosec}^2\frac{A-B}{2}=152{,}56$.

37. $C=19°10'$; $c=m:2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}=0{,}75577$; $b=1{,}9583$; $a=2{,}2471$; $S=0{,}72235$. *Указание.* $m=c(\sin A+\sin B)=\ldots$

38. $A=53°7'46''$; $a=n:2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C-B}{2}=232$; $b=210$; $c=286$; $S=24\,024$.

39. $C=102°52'$; $a=p\cdot\sin\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}=80{,}22$;

$b=p\cdot\sin\frac{B}{2}\sec\frac{A}{2}\sec\frac{C}{2}=152{,}81$; $c=p\cdot\sin\frac{C}{2}\sec\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}=187{,}74$;

$S=p^2\cdot\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=5975{,}1$.

Указание. 1-й способ. Имеем $2p=2R(\sin A+\sin B+\sin C)=$

$=8R\cdot\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$, отсюда $2R=\frac{\frac{p}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$, чем и пользуемся при вычислении и с помощью чего составляем выражения для сторон, а затем для площади.

2-й способ. На продолжениях стороны AC отложим $CE=CB$ и $AD=AB$ и соединим точки D и E с B; в треугольнике DBE сторона $DE=2p$, угол $D=\frac{A}{2}$, угол $E=\frac{C}{2}$. Из равнобедренного треугольника BCE найдем: $a=\frac{BE}{2}:\cos\frac{C}{2}$; для определения BE имеем из треугольника DBE:

$$BE:2p=\sin\frac{A}{2}:\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}:\cos\frac{B}{2}.$$

Таким путем определится a; выражения для b и c составим *по аналогии.*

40. $C=118°4'22''$; $c=r\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{B}{2}$;

$b=r\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{C}{2}$; $a=r\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{C}{2}$;

$S=r^2\cdot\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$.

Для вычисления удобнее воспользоваться отрезками (x, y, z) сторон от вершин (A, B, C) до точек касания; тогда получим: $x=25$, $y=14$ и $z=3$, после чего найдем: $a=z+y=17$, $b=z+x=28$, $c=x+y=39$ и $S=(x+y+z)r=42\cdot5=210$.

41. $A=33°52'22''$; $C=98°7'38''$; $a=0{,}69272$; $b=0{,}92364$; $S=0{,}3167$.
42. $C=47°26'25''$; $B=37°3'35''$; $b=38{,}452$; $c=47$; $S=899{,}48$.
43. $A_1=75°45'$; $C_1=87°11'$; $a_1=220{,}16$; $b_1=66{,}663$; $S_1=7329{,}7$; $A_2=104°15'$; $C_2=58°41'$; $a_2=257{,}4$; $b_2=77{,}94$; $S_2=8569{,}4$.
44. $B=35°53'7''$; $C=97°46'18''$; $b=12{,}954$; $c=21{,}886$; $S=102{,}6$.
45. $B=10°1'34''$; $C=101°15'26''$; $a=155{,}21$; $c=163{,}37$; $S=2207{,}3$.
46. $A=12°7'36''$; $C=43°14'24''$; $b=166{,}47$; $c=138{,}6$.
47. $A=100°24'56''$; $B=50°12'28''$; $C=29°22'36''$; $c=15{,}961$; $S=196{,}22$.
48. $A=38°49'10''$; $B=19°17'52''$; $C=121°52'58''$; $a=23{,}9$; $b=12{,}6$; $c=32{,}374$; $S=127{,}85$.
49. $A=126°43'1''$; $B=39°35'51''$; $a=1196$; $b=951$; $S=13\,455$.

Указание. $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}$; отсюда $\cos\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{m}{c}\cdot\sin\dfrac{C}{2}$, с помощью чего определим $\dfrac{A-B}{2}$; зная же $\dfrac{A+B}{2}$ и $\dfrac{A-B}{2}$, *найдем* A *и* B.

50. $A=81°30'32''$; $B=44°49'28''$; $a=22{,}479$; $b=16{,}022$; $S=145{,}06$.
51. $B=41°4'50''$; $C=36°17'10''$; $a=8{,}5556$; $b=5{,}7616$; $S=14.586$.

Указание. 1-й способ. По первой формуле Мольвейде имеем: $\dfrac{m}{c}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}$; отсюда $\dfrac{m+c}{m-c}=\dfrac{2\cos\frac{1}{2}A\cdot\cos\frac{1}{2}B}{2\sin\frac{1}{2}A\cdot\sin\frac{1}{2}B}=\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}$, что дает возможность определнть угол B.

2-й способ. Перемножая формулы

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\quad\text{и}\quad\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

получим:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{p-c}{p},\ \text{но}\ \frac{p-c}{p}=\frac{2(p-c)}{2p}=\frac{a+b-c}{a+b+c}=\frac{m-c}{m+c}.$$

52. $B=37°43'46''$; $C=63°36'14''$; $a=16{,}58$; $b=10{,}347$; $S=76{,}832$.

Указание. 1-й способ. По второй формуле Мольвейде имеем: $\dfrac{n}{c}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}$; отсюда $\dfrac{c+n}{c-n}=\dfrac{2\sin\frac{1}{2}A\cdot\cos\frac{1}{2}B}{2\cos\frac{1}{2}A\cdot\sin\frac{1}{2}B}=\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}$, что дает возможность определить угол B.

2-й способ. Разделив $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$ на $\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}$, получим $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}:\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}=\dfrac{p-b}{p-a}$; но $\dfrac{p-b}{p-a}=\dfrac{2(p-b)}{2(p-a)}=\dfrac{c+a-b}{c+b-a}=\dfrac{c+n}{c-n}$.

53. $A=115°39'32''$; $B=25°39'32''$; $C=38°40'56''$; $a=9{,}996$; $b=4{,}802$; $c=6{,}931$.
54. $A=26°33'54''$; $B=30°4'31''$; $C=123°21'35''$; $a=h_c:\sin B=71{,}837$; $c=h_b:\sin A=134{,}16$; $b=c\cdot0{,}6=80{,}496$; $S=0{,}5\cdot c\cdot h_c=2114.9$.

Указание. $\operatorname{tg} A = 0{,}5$; $b : c = h_c : h_b = 3 : 5$.

55. $A = 27°16'17''$; $B_1 = 63°42'$; $C_1 = 89°1'43''$; $c_1 = 50{,}189$; $S_1 = 517{,}43$; $B_2 = 116°18'$; $C_2 = 36°25'43''$; $c_2 = 29{,}807$; $S_2 = 307{,}3$.

56. $B = 11°25'16''$; $A_1 = 55°1'27''$; $C_1 = 113°33'17''$; $c_1 = 134{,}05$; $S_1 = 0{,}5 \cdot c_1 \cdot h_c = 15{\cdot}5$; $A_2 = 124°58'33''$; $C_2 = 43°36'11''$; $c_2 = 101$; $S_2 = 1200$.

57. $C_1 = 30°$; $B_1 = 103°3'52''$; $A_1 = 46°56'8''$; $c_1 = 4{,}1063$; $C_2 = 150°$; $B_2 = 17°11'32''$; $A_2 = 12°48'28''$; $c_2 = 13{,}533$. (Двойственность решения пояснить чертежом.)

58. $A = 30°24'$; $B = 99°45'20''$; $C = 49°5'40''$; $a = 50{,}32$; $S = 1884{,}5$.

59. $A = 83°24'48''$; $B = 36°35'12''$; $C = 60°$; $c = 17{,}436$; $S = 103{,}92$.

Указание. Сначала продолжаем медиану CD на расстояние $DE = CD$ и, соединив точки B и E, определяем из треугольника CBE угол CBE.

60. $A = 127°10'8''$; $B = 32°5'22''$; $C = 20°44'32''$; $a = h_b : \sin C = 33{,}882$; $b = h_a : \sin C = 22{,}588$, $c = h_a : \sin B = 15{,}059$; $S = 135{,}53$.

Указание. Имеем $a : b : c = \frac{2S}{8} : \frac{2S}{12} : \frac{2S}{18} = 9 : 6 : 4$, что дает возможность определить углы.

61. $A = 135°10'52''$; $B = 27°7'27''$; $C = 17°41'41''$; $a = 64{,}933$; $S = 414{,}47$.

Указание. Имеем (сравнивая площади треугольников) $\frac{bc}{2} \cdot \sin A = \frac{bl_a}{2} \cdot \sin\frac{A}{2} + \frac{cl_a}{2} \cdot \sin\frac{A}{2}$; отсюда найдем $\cos\frac{A}{2} = \frac{(b+c)l_a}{2bc}$.

§ 14.

1. a) $x = 30° + 360° \cdot n$; $150° + 360° \cdot n$ или $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$; b) $x = 30°$, $150°$ или $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

2. a) $x = \pm 51°49'37'' + 360° \cdot n$; b) $x = 51°49'37''$; $308°10'23''$.

3. a) $x = \pm 72° + 360° \cdot n$; $\pm 144° + 360° \cdot n$ или $x = \pm\frac{2\pi}{5} + 2\pi n$; $\pm\frac{4\pi}{5} + 2\pi n$; b) $x = 72°$, $144°$, $216°$, $288°$, или $x = \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$.

4. a) $x = -45° + 180° \cdot n$ или $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$; b) $x = 135°$, $315°$, или $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

5. a) $x = \pm 60° + 180° \cdot n$ или $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$; b) $x = 60°$, $120°$, $240°$, $300°$, или $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

6. a) $x = 180° \cdot n$; $\pm 60° + 360° \cdot n$, или $x = \pi n$; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; b) $x = 0$, $60°$, $180°$, $300°$, $360°$, или $x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$.

7. a) $x = 90° + 180° \cdot n$; $19°28'17'' + 360° \cdot n$; $160°31'43'' + 360° \cdot n$; b) $x = 19°28'17''$, $90°$, $160°31'43''$, $270°$.

8. а) $x=\pm 45^\circ+360^\circ\cdot n$; $\pm 135^\circ+360^\circ\cdot n=45^\circ+90^\circ\cdot m$, или $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$; $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot m$; b) $x=45^\circ$, 135°, 225°, 315°, или $x=\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$.

9. а) $x=10^\circ+120^\circ\cdot n$; $50^\circ+120^\circ\cdot n$, или $x=\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}\cdot n$; $\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}\cdot n$; b) $x=10^\circ$, 50°, 130°, 170°, 250°, 290°, или $x=\frac{\pi}{18}$, $\frac{5\pi}{18}$, $\frac{13\pi}{18}$, $\frac{17\pi}{18}$, $\frac{25\pi}{18}$, $\frac{29\pi}{18}$.

10. а) $x=112^\circ30'+450^\circ\cdot n$, или $x=\frac{5\pi}{8}+\frac{5\pi}{2}\cdot n$; b) $x=112^\circ30'$, или $x=\frac{5\pi}{8}$.

11. а) $x=90^\circ(6n\pm 1)$, или $x=\frac{\pi}{2}(6n\pm 1)$; b) 90°, или $\frac{\pi}{2}$.

12. а) $x=4\pi(3n\pm 1)$; b) нет.

13. 1) $\alpha-\beta=180^\circ\cdot 2n$; $\alpha+\beta=180^\circ\cdot(2n+1)$; 2) $\alpha\pm\beta=360^\circ\cdot n$; 3) $\alpha-\beta=180^\circ\cdot n$; 4) $\alpha-\beta=180^\circ\cdot n$; 5) $\alpha+\beta=180^\circ\cdot 2n$; $\alpha-\beta=180^\circ\cdot(2n+1)$; 6) $\alpha\pm\beta=180^\circ\cdot(2n+1)$; 7) $\alpha+\beta=180^\circ\cdot n$; 8) $\alpha+\beta=180^\circ\cdot n$; 9) $\alpha\pm\beta=90^\circ+360^\circ\cdot n$; 10) $\alpha\pm\beta=270^\circ+360^\circ\cdot n$; 11) $\alpha+\beta=90^\circ+180^\circ\cdot n$; 12) $\alpha-\beta=90^\circ+180^\circ\cdot n$.

Указание. Приведя равенство к нулю, заменяем первую часть произведением или дробью.

14. $9^\circ(2k+1)$. 15. $18^\circ k$. 16. $60^\circ(2k+1)$.

17. $\sin 2x=\frac{a}{b-a}$. Уравнение имеет корни, если $a\leqslant\frac{b}{2}$.

18. $\frac{k}{p+q}\cdot 180^\circ$. 19. $45^\circ(4k-1)$ и $22^\circ30'(4k+3)$.

20. $36^\circ k$ и $45^\circ k$. 21. $x=\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{b}{a}\right)+180^\circ n$.

22. $(2k+1)\cdot 90^\circ$ и $180^\circ k+45^\circ$. 23. $(-1)^n\operatorname{arc\,sin}\frac{-2\pm\sqrt{54}}{10}+180^\circ n$.

24. $\pm 2\operatorname{arc\,cos}\frac{\sqrt{17}-1}{4}+720^\circ n$. 25. $180^\circ k+(-1)^k 30^\circ-\frac{m}{2}$.

26. $90^\circ k$ и $\pm 120^\circ+360^\circ k$. 27. $180^\circ k$.

28. $\operatorname{tg}x_1=\operatorname{tg}x_2=\frac{a}{b}$.

30. $x_1=126^\circ52'12''+360^\circ\cdot n$; $x_2=-151^\circ55'40''+360^\circ\cdot n$.

31. $x=360^\circ\cdot n$; $-126^\circ52'12''+360^\circ\cdot n$.

32. $x=31^\circ58'41''\pm 16^\circ20'+360^\circ n$.

33. $x=15^\circ+360^\circ\cdot n$; $105^\circ+360^\circ\cdot n$. *Указание.* Разделив обе части данного уравнения на 2, получим: $\cos(x-60^\circ)=\cos 45^\circ$.

34. $x_1=x_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\cdot n$. 35. $x=180^\circ\cdot n$; $45^\circ+180^\circ\cdot n$

36. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$.

37. $x = \pm 60° + 360° \cdot n$. *Указание.* Приведя уравнение к нулю и соединив тогда первую часть в одну дробь, сокращаем ее на $1 + \sin x$.
38. $x = 10°9'40'' + 180° \cdot n$; $79°50'20'' + 180° \cdot n$.

39. $\frac{\pi}{4} + x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$. 40. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\frac{\pi}{6} + \pi n$; $\frac{\pi}{3} + \pi n$.

41. $x = \pm 60° + 360° \cdot n$; $\pm 120° + 360° \cdot n = \pm 60° + 180° \cdot m$.
42. $x = 75° + 180° \cdot n$; $15° + 180° \cdot n$. 43. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c$.
44. $x = 180° \cdot n$; $\pm 60° + 180° \cdot n = 60° \cdot m$.
45. $x = -15° + 180° \cdot n$; $-75° + 180° \cdot n$.
46. $x = 60° \cdot n$; $15° + 30° \cdot n$.

47. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$; $-\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$. 48. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot n$.

49. $x_1 = x_2 = 90° + 180° \cdot n$; $x_3 = 45° + 90° \cdot n$.
50. $x = \pm 18° + 360° \cdot n$; $\pm 162° + 360° \cdot n$; $\pm 54° + 360° \cdot n$; $\pm 126° + 360° \cdot n = 180° \cdot m \pm 18°$; $180° \cdot m \pm 54°$.

51. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} \cdot n$. *Указание.* $\cos 4x + \cos 2x$ заменить произведением.

52. $x = 120° \cdot n$; $-90° + 360° \cdot n$; $45° + 180° \cdot n$. *Указание.* $\cos x - \cos 2x$ заменить произведением, а $\sin 3x$ разложить как $\sin 2\left(\frac{3x}{2}\right)$.

53. $\cos \frac{3x}{2} = 0$; $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{b}{a}$.

54. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $\pi n + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6}$. *Указание.* Заменив $\sin x + \sin 3x$ и $1 + \cos 2x$ произведениями и, сделав еще некоторые преобразования, придем к такому уравнению: $\cos x (1 + 2\cos x)(1 - 2\sin x) = 0$.

55. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot n$. *Указание.* Данное уравнение приводится к следующему: $\frac{\cos 2x}{\sin 3x \cdot \cos x} = 0$.

56. $\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{17} - 1}{4}$; $x = \pm 77°20'12'' + 720° \cdot n$.

57. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi n$.

58. $x = \frac{\pi}{2} \cdot n + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12}$. *Указание.* Первую часть заменяем одной дробью $\left(\frac{4}{\sin^2 x}\right)$.

59. $\cos x_1 = \cos x_2 = \frac{1}{3}$; $x_1 = x_2 = \pm 70°31'43'' + 360° \cdot n$.

60. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n$; $x_2 = x_3 = \pi n$.

Указание. $1 + \sin 2\alpha = (\cos \alpha + \sin \alpha)^2$.
61. $x_1 = x_2 = 90° \cdot n$; $x_3 = \pm 30° + 180° \cdot n$, или $x = 90° \cdot n$; $180° \cdot n$; $30° + 60° \cdot n$.
Указание. $\sin^2 3x - \sin^2 x$ заменяем произведением.
62. $x = 60° \cdot n$; $\pm 35°15'53'' + 180° \cdot n$.

Указание. Представив данное уравнение в виде $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = -\operatorname{tg} 3x$, разлагаем $\operatorname{tg} 3x$ как $\operatorname{tg}(x + 2x)$, тогда новое уравнение распадается на следующие два: 1) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 0$ и 2) $1 = -1 : (1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x)$. Из уравнения (1) получим $\sin 3x = 0$, а из уравнения (2) $\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$.

63. $x = \frac{\pi}{8} \cdot n;\ \frac{\pi}{4} \cdot n$.

Указание. Умножив обе части на 2, применяем равенство $2 \cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$.

64. $x = 45° + 180° \cdot n;\ 90° + 180° \cdot n$. **65.** $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$.

66. $x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n$. **67.** $x = \pm 60° + 180° \cdot n;\ 90° + 180° \cdot n$.

68. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$. **69.** $x_1 = 90° + 180° \cdot n; x_2 = x_3 = 90° + 360° \cdot n$.

70. $x_1 = \pi n; x_2 = x_3 = 2\pi n$.

71. $\operatorname{tg} x = \pm(\sqrt{2} + 1);\ \pm(\sqrt{2} - 1);\ x = \pm\frac{3}{8}\pi + \pi n;\ \pm\frac{\pi}{8} + \pi n = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \cdot m$.

72. $x = 60° \cdot n;\ 180° \cdot n$.

Указание. $\operatorname{tg} 2x$ заменяем через $\frac{2 \sin x \cos x}{\cos 2x}$.

73. $x = \pi n$. **74.** 1) $\sin x = 0{,}8;\ \sin y = -0{,}6$; 2) $\sin x = -0{,}6;\ \sin y = 0{,}8$.

Указание. Уравнения: $\sin y = 0{,}2 - \sin x$ и $\cos y = -0{,}2 - \cos x$ возвышаем в квадрат и складываем.

75. 1) $\cos x = \frac{1}{2}, \cos y = \frac{1}{3}$; 2) $\cos x = -\frac{1}{2}; \cos y = -\frac{1}{3}$; 3) $\cos x = \frac{1}{3}, \cos y = \frac{1}{2}$; 4) $\cos x = -\frac{1}{3}, \cos y = -\frac{1}{2}$.

Указание. Взяв сумму и разность данных уравнений, выражаем из новых уравнений $\cos y$ и $\sin y$ и квадраты их складываем.

76. 1) $\operatorname{tg} x = 5 + \sqrt{34}, \operatorname{tg} y = 5 - \sqrt{34}$; 2) $\operatorname{tg} x = 5 - \sqrt{34}, \operatorname{tg} y = 5 + \sqrt{34}$.

77. $x^2 = \frac{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\varphi}{\sin^2\varphi}$.

Указание. Взяв $\cos(\alpha + \beta) = \cos\varphi$, раскрываем скобки, выражаем затем $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ соответственно через $\sin\alpha$ и $\sin\beta$ и заменяем $\sin\alpha$ и $\sin\beta$ через $\frac{a}{x}$ и $\frac{b}{x}$.

78. 1) $x = 45° + 180°(m + n),\ y = 15° + 180°\ (m - n)$;
2) $x = 105° + 180°\ (m + n),\ y = -45° + 180°\ (m - n)$; 3) $x = -15° + 180°\ (m + n),\ y = -45° + 180°\ (m - n)$; 4) $x = 45° + 180°\ (m + n),\ y = -105° + 180°\ (m - n)$.

79. 1) $x = 21°21'16'',\ y = 8°38'44''$; 2) $x = 81°21'16'', y = 68°38'44''$.

80. 1) $x = 81°21'16'', y = 21°21'16''$; 2) $x = 21°21'16'',\ y = 81°21'16''$.

81. x и y определяются по их полусумме и полуразности: 1) по первому уравнению имеем $\frac{x+y}{2} = \frac{a}{2}$; 2) с помощью второго уравнения, заменив его через $2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} = a$, можно определить $\frac{x-y}{2}$.

82. $x=15°20'$, $y=61°40'$.

83. x и y определяются по их сумме и разности: 1) $x+y$ дано; 2) $x-y$ найдем с помощью второго уравнения, если умножим обе части его на 2 и $2\sin x\cdot\sin y$ заменим через $\cos(x-y)-\cos(x+y)$.

84. $x=60°$, $y=11°40'$.

85. Из первого уравнения имеем $\frac{1}{2}(x+y)=\frac{1}{2}\alpha$, а из второго уравнения находим: $\frac{\sin x+\sin y}{\sin x-\sin y}=\frac{m+n}{m-n}$, или $\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x+y)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(x-y)}=\frac{m+n}{m-n}$, откуда определяем $\frac{1}{2}(x-y)$.

86. $x=35°46'$, $y=60°52'$.

87. Второе уравнение можно заменить таким: $\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}=a$, откуда $\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{a}\cdot\sin(x+y)$ или $\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{a}\cdot\sin\alpha$. Умножим теперь обе части на 2 и заменим $2\cos x\cdot\cos y$ через $\cos(x+y)+\cos(x-y)$; тогда можно будет определить $x-y$.

88. $x=44°20'3''$, $y=13°20'3''$.

89. Заменив второе уравнение через $\frac{\sin x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y}=\frac{a}{1}$, находим отсюда $\frac{\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y}=\frac{1+a}{1-a}$, или $\frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}=\frac{1+a}{1-a}$, и с помощью этого уравнения определяем затем $x-y$.

90. $x=45°$, $y=40°$.

91. Из второго уравнения найдем: $\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}=\frac{m+n}{m-n}$, или $\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\frac{m+n}{m-n}$, с помощью чего определим затем $x-y$.

92. 1) $x=22°25'$; $y=18°39'$; 2) $x=71°21'$, $y=67°35'$.

93. $x=180°\cdot k\pm30°$, $y=180°\cdot k\pm60°$.

94. $\operatorname{tg}x=1$; $\operatorname{tg}y=2$; $\operatorname{tg}z=3$; $x=45°$; $y=63°26'6''$; $z=71°33'54''$. *Указание.* $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z$.

95. $x=30°57'50''$; $y=78°41'25''$; $z=70°20'47''$. (См. задачу 94.)

§ 15.

1. 1) $-\frac{\pi}{6}$; 2) $2\pi n\pm\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{3}{4}\pi$.

2. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 0; 3) $\sqrt{3}$.

3. 1) -1; 2) 1; 3) 0.

4. 1) x; 2) $\pm\frac{3}{5}$; 3) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

5. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\sqrt{3}$.

6. 1) $-\frac{\pi}{5}$; 2) $x+\pi n$; 3) $\frac{5\pi}{14}$.

7. 1) 0,6; 2) $\frac{15}{17}$; 3) $\frac{3}{4}$.

8. 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$.

9. 1) ∞; 2) ∞.

10. $\sqrt{3}$.

11. $\frac{77}{85}$.

12. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13. $\frac{41}{49}$.

14. $2m\cdot\sqrt{1-m^2}$. 15. $\frac{47}{52}$. 16. $\frac{2m}{1+m^2}$. 32. $\pm\sqrt{2}$.

33. 0; $\frac{1}{2}$. 34. $\pm\sqrt{3}$. 35. $\sqrt{2}$. 36. 0; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$.

37. $\frac{\pi}{4}+\pi n$. 38. $\pm\frac{\pi}{6}$. 39. $\frac{2(5-2\sqrt{2})}{17}$. 40. $\frac{1}{2}$.

41. 0; $\frac{1}{2}$. 42. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 43. $\pm\sqrt{\frac{2}{a}}$. 44. $\sqrt{3}$; $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

45. $\pm\frac{1}{3}$.

§ 16.

1. $OM=a\cos\alpha=3{,}3$ м. 2. $\operatorname{arc\,tg}\frac{r}{p}=60°26'$. 3. $\operatorname{arc\,ctg}\frac{2a}{a}=53°8'$.

4. 35°16'. 5. 5,2 м; 28°33'. 6. 51°3'.

7. 2,6 м; 67°23'. 8. 70°32'.

9. $\cos\varphi=\cos\alpha\cdot\cos\beta$; $\varphi=45°$. 10. $\cos\varphi=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$; 6°12'

11. $x=\operatorname{arc\,tg}\frac{4hS}{abc}=75°52'$. 12. $\frac{a\sin\beta\operatorname{tg}\varphi}{\sin(\beta+\gamma)}=322{,}5$ м.

13. $\frac{a^2}{4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

14. $\arcsin\frac{n\pm m}{a}$; 13°21' или 90°. 15. $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.

16. $\sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}$. 17. $\arcsin\frac{c\sin\alpha}{d}$; 45°.

18. $\sqrt{b^2-a^2}\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$ (перпендикуляры направлены в одну сторону);

$\sqrt{b^2-a^2}\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ (перпендикуляры направлены в разные стороны).

19. 82°49'10" и 41°24'35".

§ 17.

1. $a\operatorname{tg}\alpha=5{,}44$. 2. 1) $\arcsin\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$; 2) 22°37'.

3. $\sin x=\sin 20°\cdot\cos 25°$; $x=18°3'$.

4. 22°. 5. $\sin\varphi=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$. 6. $\frac{180°}{n}$.

7. a) 27 м; 12 м; b) $\alpha=18°33'$; $\beta=46°29'$; c) 8°37'; 19°57';
d) 18°47'; 50°32'; 839°48'; 9. $\frac{a}{2}\sin 2\alpha\cdot\sin\varphi$.

10. $\operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{tg}y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$. 11. $x=\arcsin\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}\right)$.

12. 73°24'. 13. 30°. 14. $\varphi=\arcsin 0{,}6=36°52'$.

15. $\cos x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}$; $\sin\frac{\varphi}{2}=\cos\frac{180°}{n}\sec\frac{\alpha}{2}$.

6. 1) 70°32'; 2) 109°28'; 3) 138°12'; 4) 116°34'.

§ 18.

1. 43,3 $см^2$. 2. $Q\sqrt{2}$. 3. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$.
4. 42,2 $см$. 5. 1954 $см^2$. 6. 33 $м^2$.
7. 36°52′; 3 $м$. 8. Одинаково.
9. $Q\cdot\sin\alpha$; меньше; ярче. 10. 106 $мм^2$.

§ 19.

1. 67°59′.
2. Секущая плоскость параллельна диагонали основания и составляет с плоскостью основания угол φ, причем $\cos\varphi = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 3. $\frac{7a^2}{8\cos\alpha}$.
4. 1) $\frac{3}{4}a\sqrt{a^2+2b^2}$; 2) $\operatorname{arc\,tg}\frac{b\sqrt{2}}{a}$.
5. Секущая плоскость параллельна большей диагонали основания и составляет с плоскостью основания угол φ, причем $\cos\varphi = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.
6. $d^2\sqrt{2}\cdot\sin 2\beta\cdot\sin(45°+\alpha)\approx 393{,}1\ м^2$. 7. $d^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}\approx 1963\ м^2$.
8. $5a^2\operatorname{ctg}36°\cos^2 27°\approx 3092\ м^2$.
9. $4a^2\operatorname{cosec}\frac{\beta}{2}\cos^2\left(45°-\frac{\alpha}{4}\right)\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}\approx 34\,700\ см^2$.
10. $\frac{1}{3}a^2\sqrt{3}\sec\alpha(1+\sqrt{1+3\sin^2\alpha})$.
11. $x=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\right)=16°6′$; $y=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\varphi\right)=26°4′$.
12. $x=\arccos\left(\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)=54°45′$. 13. $\frac{a\sin\alpha}{2\sin(\alpha+45°)}$.
14. $\frac{1}{4}a^2\sec\alpha\sqrt{\sin(\alpha+30°)\sin(\alpha-30°)}$.
15. $x=\frac{1}{2}\arcsin\frac{P\sqrt{2}}{c^2}=29°2′$ или $60°58′$; $y=2c\cos x=8{,}743$ или $1{,}853$.
16. $\operatorname{tg}\left(45°-\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{m\sqrt{2}}{n}$; $\varphi=90°-2\operatorname{arc\,tg}\frac{m\sqrt{2}}{n}=30°$.
17. $\frac{a^2}{9\sqrt{3}}\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}=1{,}962$. 18. $a^2\cdot\frac{\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$. 20. 48 $см^2$.
21. 1) $2a^2$; 2) $\frac{a^2}{2}$; $3a^2$. 22. 168 $см^2$. 23. 14,61 $м^2$.
24. 32°51′. 25. $a^2\sec\alpha$. 26. $4h^2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.
27. $2a^2\sin\alpha\cos^2\frac{\varphi}{2}\sec\varphi$. 28. $2nk^2\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{180°}{n}=6238$.
29. $\frac{1}{2}(b^2-a^2)\operatorname{tg}\varphi\cos^2\frac{\alpha}{2}\sec\alpha$. 30. $l^2\sin 2\alpha\cos^2\frac{\varphi}{2}\sec\varphi$.
31. $a^2\sqrt{2}\sin\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}$.

32. $\dfrac{na^2}{4\sin\dfrac{180^\circ}{n}\cos\alpha}\sqrt{1-\sin^2\dfrac{180^\circ}{n}\cos^2\alpha}$ или $\dfrac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}\sqrt{1+\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\dfrac{180^\circ}{n}}}$.

33. $a^2\sec^2\alpha\cdot\sin\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)\cos\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)$.

34. $a^2\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)$; $a^2\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{cosec}\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

35. $\dfrac{2h^2}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\dfrac{\beta}{2}\right)$.

36. $a^2\sin\alpha\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\dfrac{\varphi}{2}\right)$. 37. $\sqrt{c^2-\dfrac{(a-b)^2}{4}\operatorname{cosec}^2\dfrac{180^\circ}{n}}$.

38. $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\alpha\cdot\dfrac{m-n}{m+n}\sqrt{2}$; $\varphi=\operatorname{arc tg}\left(\operatorname{tg}\alpha\cdot\dfrac{m-n}{m+n}\sqrt{2}\right)$.

39. $\dfrac{n(a+b)}{2}\sqrt{\dfrac{(a-b)^2}{4}\operatorname{ctg}^2\dfrac{180^\circ}{n}+h^2}+n\dfrac{a^2+b^2}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}$.

40. $\dfrac{n(a^2-b^2)}{4\sin\dfrac{180^\circ}{n}}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\cos^2\dfrac{180^\circ}{n}}+\dfrac{n(a^2+b^2)}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}$.

41. $nd^2\dfrac{m+1}{m-1}\sin\alpha\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$. 42. $2h^2\operatorname{ctg}\beta\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}=2927{,}7$.

§ 20.

1. $\lg\varphi=\sin 15^\circ$; $\varphi=\operatorname{arc tg}(\sin 15^\circ)=14^\circ31'$. 2. $R\operatorname{cosec}\alpha\sqrt{-\cos 2\alpha}$.

3. $\sqrt{R^2\sin^2\alpha+d^2\cos^2\alpha}$. 4. $\dfrac{b\sin 2\alpha}{2\sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha)}$.

5. $\left(\dfrac{R}{\cos\alpha\cdot\cos\varphi}\right)^2\sin\alpha\sqrt{\cos(\alpha+\varphi)\cos(\alpha-\varphi)}$.

6. $\dfrac{a}{4}\cdot\dfrac{\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta}{\sin(\beta+\alpha)\cdot\sin(\beta-\alpha)}$. 7. $\dfrac{l\sin\alpha\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\operatorname{tg}\alpha}=l\sin\alpha\sin^2\varphi$, где φ определяется из равенства $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}=\operatorname{ctg}^2\varphi$.

8. $\dfrac{R\sin\alpha\cdot\sin 60^\circ}{\sin(\alpha+60^\circ)}$. 9. $2\pi a^2\cos\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$. 10. $70^\circ32'$.

11. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\pi}{4}$; $\alpha=2\operatorname{arc tg}\dfrac{\pi}{4}=76^\circ17'32''$. 12. $\pi Q\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

13. $\sin\alpha\sqrt{S\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}}=19{,}415$ *см*. 14. 22,523 *м*²; 4,14 *м*².

15. $\alpha=2^\circ52'$; $\varphi=33^\circ41'$; $\gamma=85^\circ42'$; $b=80$ *м*; $r=6$ *м*; 540 *м*²; 646 *м*².

16. Поверхность насыпи увеличится на $\dfrac{bd}{\cos\alpha}+\dfrac{ld}{\cos\varphi}$.

17. $\sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{S}{\pi a^2}$; $x=2\operatorname{arc}\sin\dfrac{S}{\pi a^2}=30^\circ23'$. 18. $H\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

19. $360^\circ\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}$; 1) 180°; 2) 207°,5. 20. $\dfrac{\pi(R^2-r^2)}{\cos\alpha}$.

21. $\dfrac{\pi S^2}{\sqrt{1+3\sin^2\alpha}}$. 22. $\dfrac{\pi(m^2-n^2)}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$. 23. $\dfrac{(R^2-r^2)\sin\delta}{2\cos\beta}$.

24. $\pi h^2 \sec\alpha$. 25. $\cos\varphi=\dfrac{m-n}{p}$.

26. $S_{бок}=\pi l^2\sin\alpha=426$; $S_{полн}=2\pi l^2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+15^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-15^\circ\right)=652$.

27. $\dfrac{Q-q}{\cos\alpha}$.

§ 21.

1. $\frac{1}{2}l^3\sin\beta\sin\varphi\cos^2\varphi$. 2. $\frac{1}{2}d^3\sin\alpha\operatorname{tg}\beta\sin\frac{\alpha}{2}=84{,}48\ дм^3$.

3. $2ab\sin\alpha\sqrt{ab\cos\alpha}$. 4. $\frac{1}{2}d^3\sin 60^\circ\operatorname{tg}\varphi=1000\ дм^3$; 30°.

5. $V=abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$; $\sin x=\sqrt{-\cos 2\alpha}$; $x=45^\circ$.

6. $\dfrac{a^3}{\sin\alpha}\sqrt{\cos 2\alpha}$. 7. $\dfrac{a^3\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=271{,}69\ см^3$.

8. $\dfrac{3a^3}{8\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$. 9. $516\ м^3$.

10. $3999\ дм^2$; $17854\ дм^3$. 11. $\dfrac{4r^2h\cos^2\left(45^\circ-\frac{\delta}{2}\right)}{\sin\delta}=3{,}63\ м^3$.

12. $491\ м^3$. 13. $\frac{a^2b}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

14. $\frac{1}{6}nb^3\cos^2\beta\sin\beta\sin\frac{360^\circ}{n}=1{,}5\ м^3$. 15. $\frac{4}{3}b^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$.

16. $\frac{2}{3}h^3\operatorname{ctg}^2\varphi\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$. 17. $\frac{b^3}{6}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$.

18. $\frac{2}{3}a^3\cos^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\varphi$. 19. $\frac{1}{24}(a+b)^2\sqrt{a(a-2b)}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

20. $\frac{1}{6}P\sqrt{P\operatorname{tg}\alpha}\operatorname{tg}\varphi$. 21. Объем части при вершине A: $V_A=138{,}05$.

22. $45^\circ17'22''$ и $25^\circ14'22''$. 23. $220\ м^3$.

24. $\dfrac{a^3-b^3}{6\cos\alpha}\sqrt{-\cos 2\alpha}=4302{,}4$. 25. $3{,}5\ м^3$.

26. $\dfrac{n(a^3-b^3)\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}}{24\sin\frac{180^\circ}{n}}\operatorname{tg}\alpha$.

27. $V=\dfrac{n}{12}(a^2+b^2+ab)\sqrt{l^2-\dfrac{(a-b)^2}{4}\cos^2\dfrac{180^\circ}{n}}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}$;

$S_{полн}=\dfrac{n(a+b)}{2}\sqrt{l^2-\dfrac{(a-b)^2}{4}+\dfrac{n(a^2+b^2)}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}}$.

28. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{-\cos\alpha}}$. 29. $\frac{d^3\cos\alpha\cdot\sin 2\alpha}{8\pi}$. 30. $\frac{\pi a^2 h}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=7895{,}5\ дм^3$.

31. $\frac{\pi a^2}{\sin^2\frac{180^\circ}{n}}$; $\frac{\pi a^3}{4\sin^3\frac{180^\circ}{n}}$ 32. 2,1 $м^3$. 33. $\frac{\pi b^2 H}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

34. $S=\frac{\pi Q}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{180^\circ}{n}}\sqrt{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{180^\circ}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)}$;

$V=\frac{\pi Q}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin^3\frac{180^\circ}{n}}\sqrt{Q\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{180^\circ}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{180^\circ}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

35. 3,1 $м$.

36. $S=2\pi l^2\sin\alpha\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=1747\ дм^2$;

$V=\frac{\pi}{3}l^3\sin^2\alpha\cos\alpha=14\,561\ дм^3$.

37. 1) $\frac{2\pi h^2\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 2) $\frac{\pi h^3}{3}\operatorname{ctg}^2\alpha$.

38. $S=\frac{2\pi R^2}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$; $V=\frac{\pi R^3}{3}\operatorname{tg}\alpha$. 39. $\frac{\pi R^3}{3}\sin^3\alpha\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

40. $\frac{\pi a^3\operatorname{ctg}\beta}{24\sin^3\frac{\alpha}{2}}$. 41. $\frac{\pi d^3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}=0{,}30\ м^3$.

42. $\frac{\pi R^3\sin(\alpha-\beta)}{3\cos\alpha\cos\beta}=302\ дм^3$. 43. $\frac{\pi}{3}(R^3-r^3)\operatorname{tg}\alpha$.

44. $\frac{7}{6}\pi l^3\sin 2\varphi\cos\varphi$.

45. $r=\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}\cdot\frac{V+r_1^3\operatorname{tg}\alpha+r_2^3\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}}=3{,}43\ м$; $h_1=(r-r_1)\operatorname{tg}\alpha=19.1\ м$;

$h_2=(r-r_2)\operatorname{tg}\beta=3{,}93\ м$.

46. $\frac{7}{6}\pi a^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}=28{,}1\ м^3$.

47. $\frac{\pi}{12}l^3\sin\alpha(2-\cos 2\alpha)=1200$.

§ 22.

1. 3562 $км$. 2. 36 720 $км$; 15 930 $км$. 3. $\frac{2r\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}$.

4. $\frac{V}{2}\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}=10\,515\ дм^3$. 5. $\frac{\sin^2 2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{2}=0{,}29629$.

6. $\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$. 7. $\frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}-\sin 2\alpha}=5{,}1\ м$. 8. $\frac{a}{2}\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$.

9. $2C\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$. 10. $\sin\alpha=\frac{n-m}{n+m}$; $(\alpha=3)^\circ$). 11. $70^\circ31'43''$.

12. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2m}}}$; $\alpha_1=78^\circ27'50''$; $\alpha_2=60^\circ$.

13. $\sin\alpha=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; $\alpha=52^\circ32'$. 14. $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\alpha=70^\circ31'46''$.

15. $\sin\alpha=\sqrt{\frac{n}{m}}$; $(\alpha=45^\circ)$. 16. $\frac{\sqrt{R^2+r^2+2Rr\cos 2\alpha}}{\sin 2\alpha}$.

17. 1) $4\pi r_1r_2$; 2) $\cos z=\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}$, или $\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$. 18. $\sin\frac{ABC}{2}=\frac{m-n}{m+n}$.

19. $\frac{4}{3}\pi R^3\cdot\frac{\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^6\frac{\alpha}{2}}$, или $\frac{2}{3}\pi R^3\operatorname{tg}2\varphi$, полагая $\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\varphi$.

20. $\frac{4}{3}\pi R^3d\cos^4\frac{\varphi}{2}\left(3-2\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)$. 21. 3652 $м^3=3700$ $м^3$.

22. $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2}-1$; $\alpha=48^\circ56'22''$. 23. $\frac{\pi a^2}{4}\sec^2\frac{\alpha}{4}$.

24. $4\pi R^2\sin^2\frac{\alpha}{4}=575$ $дм^2$. 25. $\frac{\pi b^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{12\sin^2\frac{\alpha}{2}}=1279{,}9$ $дм^3$. 26. $V\cdot\sin^2\frac{\alpha}{4}$.

27. $\frac{\pi R^2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\varphi}$, где $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}$. 28. 60°.

29. $\frac{4}{3}\pi R^3\sin\frac{\alpha}{2}$. 30. $\sin\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{m}{n}\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}$; $(x=15^\circ)$.

31. $\frac{\pi R^3\sin^3\frac{\alpha}{2}}{6\cos^6\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}$; $\frac{\pi R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^4\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}$.

§ 23.

1. 13,43 $м^3$; 36,116 $м^2$. 2. 306,86 $дм^2$.

3. $\frac{2}{3}\pi ab^2\operatorname{tg}^2\alpha=300{,}86$ $дм^3$. 4. $2\pi a^2\sqrt{3}\cdot\sin(30^\circ+\alpha)$.

5. $\frac{1}{3}\pi b^3\sin^2\alpha$, $4\pi b^2\sin\alpha\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(15^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)$ при $\alpha=120^\circ$: $V=\frac{\pi b^3}{4}$; $S\frac{1}{2}\pi b^2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$. 6. $8\pi a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; $2\pi a^3\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

7. $S=\pi a^2\cdot\frac{\sin B\cdot\sin C\cdot\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\sin(B+C)\cdot\cos\frac{1}{2}(B+C)}$; $V=\frac{\pi a^3}{3}\cdot\frac{\sin^2B\cdot\sin^2C}{\sin^2(B+C)}$.

8. $\frac{\pi}{3}\cdot bc(b+c)\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$. 9. $\frac{\pi}{6}\cdot\frac{a^3\operatorname{tg}2\alpha}{\cos 2\alpha}$.

10. $\frac{2}{3}\pi R^3 \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}$.

11. $V_a : V_b : V_c = \operatorname{cosec} A : \operatorname{cosec} B : \operatorname{cosec} C$.

12. $\frac{\pi b^3}{6} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}{\sin^2(\alpha+\gamma)} (3\cos\alpha \cdot \cos\gamma - \sin\alpha \cdot \sin\gamma)$; 253,824.

13. $\frac{4}{3}\pi(1+\cos^2\alpha)\sqrt{\frac{S^3}{\sin^2\alpha}}$. 14. 57 350 $м^2$; 10 110 $м^2$. 15. $\frac{10-3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}\pi a^2$.

16. $\frac{\pi p^3 \sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha}{3\cos^3\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = 378{,}69\ дм^3$. 17. $\frac{8\pi r^2}{\sin^2\alpha}\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.

18. $V = \frac{\pi b^3 \sin\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}{4\sin 30^\circ \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} = 47\,087\ см^3$. 19. $\frac{2\pi h^3}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2$;

$S = \frac{4\pi b^2}{\sin\frac{\alpha}{2}} \sin\left(15^\circ + \frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(15^\circ - \frac{\alpha}{4}\right) = 8459\ см^2$.

20. 1) $S = 4\pi r^2 \cdot \sec\frac{180^\circ}{n}$; $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \sec\frac{180^\circ}{n}$;

2) $S = 4\pi R^2 \cdot \cos\frac{180^\circ}{n}$; $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \cos^2\frac{180^\circ}{n}$;

3) $S = \pi a^2 \operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n} \cdot \sec\frac{180^\circ}{n}$; $V = \frac{\pi}{6} a^3 \operatorname{ctg}^3\frac{180^\circ}{n}\sec\frac{180^\circ}{n}$.

21. 1) $S = 2\pi r^2\left(2 + \operatorname{tg}^2\frac{180^\circ}{n}\right)$; $V = \frac{2}{3}\pi r^3\left(2 + \operatorname{tg}^2\frac{180^\circ}{n}\right)$;

2) $S = 2\pi R^2\left(1 + \cos^2\frac{180^\circ}{n}\right)$; $V = \frac{2}{3}\pi R^3 \cos\frac{180^\circ}{n}\left(1 + \cos^2\frac{180^\circ}{n}\right)$;

3) $S = \pi a^2\left(\operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n} + 0{,}5\right)$; $V = \frac{\pi a^3}{6}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{180^\circ}{n} + 0{,}5\right)$.

22. 1) $S = 4\pi r^2 \cdot \cos^4\frac{90^\circ}{n}\sec^2\frac{180^\circ}{n}$; $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \cos^4\frac{90^\circ}{n} \cdot \sec^2\frac{180^\circ}{n}$;

2) $S = 4\pi R^2 \cdot \cos^4\frac{90^\circ}{n}$; $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \cos^4\frac{90^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}$;

3) $S = \frac{\pi a^2}{4} \cdot \operatorname{ctg}^2\frac{90^\circ}{n}$; $V = \frac{\pi a^3}{24} \cdot \operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n} \cdot \operatorname{ctg}^2\frac{90^\circ}{2}$.

23. $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \sin^4\frac{\alpha}{4}$; $S = 8\pi R^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{4}$.

24. $\frac{4}{3}\pi r^3 \sin\beta \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$. 25. $\frac{4}{3}\pi r^3 \sin^3\frac{\alpha}{2}\cos\beta$.

26. $2Q \cdot \frac{360^\circ}{\alpha}\left(2\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right)$; (4259,1).

27. $\frac{4}{3}\pi R^3 \sin\alpha \cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.

28. $\cos\alpha = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$; $\alpha = 32^\circ 45' 53''$.

29. $S = 4\pi R^2 \sin\alpha \cos^2\frac{\alpha}{4}$; $V = \frac{2}{3}\pi R^3 \sin\alpha \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}$.

СОДЕРЖАНИЕ.

Часть I.

Тригонометрия.

§ 1. Измерение дуг и углов 3
§ 2. Изменение тригонометрических функций с изменением угла . 4
§ 3. Зависимость между тригонометрическими функциями одного угла 6
§ 4. Функции дополнительных и неполнительных углов 9
§ 5. Таблицы натуральных величин тригонометрических функций . . . 10
§ 6. Решение прямоугольных треугольников 11
§ 7. Решение косоугольных треугольников 18
§ 8. Формулы приведения 21
§ 9. Теорема сложения 22
§ 10. Умножение и деление аргумента 25
§ 11. Преобразование алгебраической суммы тригонометрических функций в произведение. Вспомогательный угол 27
§ 12. Применение логарифмических таблиц к вычислению тригонометрических выражений и к нахождению углов 30
§ 13. Решение косоугольных треугольников с применением логарифмов 33
§ 14. Тригонометрические уравнения 35
§ 15. Обратные круговые функции 37

Часть II.

Задачи по стереометрии, требующие применения тригонометрии.

§ 16. Прямые и плоскости 40
§ 17. Двугранные и многогранные углы 43
§ 18. Площадь проекции фигуры на плоскость 45
§ 19. Параллелепипеды, призмы и пирамиды и их поверхность 46
§ 20. Цилиндр, конус и усеченный конус и их поверхность 51
§ 21. Вычисление объемов 54
§ 22. Шар и его части 59
§ 23. Тела вращения 62
Ответы 66

---

*Редактор Я. Кетков*ич Техн. редактор *М. Ткачуков*

Уполн. Главлита Б-30332. Учгиз № 4908. У-21. Заказ № 2833. Тираж 75 тыс. (51—125 тыс.). 6 п. л. Формат 82×111¼₃₂. Бумажн. лист 581 100 п. зн. Сдано в набор 11/IV 1933 г. Подписано к печати 11/V 1933 г.

1я Образцовая типография Огиза РСФСР треста „Полиграфкнига". Москва. Валовая, 28.

СОВЕТСКИЕ УЧЕБНИКИ
БОЛЬШОЙ СКЛАД НА САЙТЕ
«СОЕТСКОЕ ВРЕМЯ»
SOVIETIME.RU

СКАЧАТЬ! с SOVIETIME.RU